ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Στατιστική

**Ενότητα 1η**: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Ολική Πιθανότητα, Ανεξαρτησία


Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Χημικών Μηχανικών Α.Π.Θ.





Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Δεσμευμένη Πιθανότητα, Ολική Πιθανότητα, Ανεξαρτησία

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Δεσμευμένη πιθανότητα.
2. Ολική πιθανότητα.
3. Θεώρημα Bayes.
4. Στατιστικά ανεξάρτητα γεγονότα.

# Σκοποί ενότητας

- Εκτίμηση της πιθανότητας της ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο ή περισσότερων γεγονότων.
- Προσδιορισμός της πιθανότητας ενός σύνθετου γεγονότος.
- Κατανόηση της έννοιας της στατιστικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός – Παραδείγματα

# Δεσμευμένη πιθανότητα (ή πιθανότητα υπό συνθήκη)

# Δεσμευμένη πιθανότητα

- Αν A και B είναι δύο γεγονότα τα οποία σχετίζονται με το ίδιο πείραμα τύχης, ως υπό συνθήκη πιθανότητα $P(A|B)$

  καλείται η πιθανότητα να συμβεί το A, δεδομένου ότι συνέβη το B, και ορίζεται από τη σχέση,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  για P(B) >0.

# Παράδειγμα 1 (1/2)

- Έστω κιβώτιο με 5 ελαττωματικά και 15 καλά ανταλλακτικά.
- Εάν πάρουμε τυχαία δύο ανταλλακτικά από το κιβώτιο, ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο να είναι ελαττωματικά;

# Παράδειγμα 1 (2/2)

- Έστω $A_1$ το γεγονός το πρώτο ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό και $A_2$ το γεγονός το δεύτερο ανταλλακτικό να είναι ελαττωματικό.
- Επίλυση με βάση τον ορισμό της **δεσμευμένης πιθανότητας**.

$$P\left(A_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 | A_1\right) = \frac{5}{20}\frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

- Επίλυση με βάση την **κλασική μέθοδο**.

$$P\left(A_1 \cap A_2\right) = \frac{N\left(A_1 \cap A_2\right)}{N\left(S\right)}$$

# Παράδειγμα 2 (1/2)

- Έστω κιβώτιο με 2 λευκές και 3 μαύρες σφαίρες και δύο παίκτες Α και Β. Οι παίκτες επιλέγουν διαδοχικά μία σφαίρα από το κιβώτιο.
- Σε περίπτωση που ο Α παίκτης επιλέξει τη λευκή σφαίρα κερδίζει το παιχνίδι. Σε περίπτωση που ο Α παίκτης επιλέξει τη μαύρη σφαίρα, συνεχίζει ο Β παίχτης.
- Σε περίπτωση που ο Β παίκτης επιλέξει τη λευκή σφαίρα κερδίζει το παιχνίδι. Σε περίπτωση που ο Β παίκτης επιλέξει τη μαύρη σφαίρα, συνεχίζει ο Α παίχτης, κοκ.
- Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο Α παίκτης, αν ξεκινήσει αυτός την επιλογή;

# Παράδειγμα 2 (2/2)

- Έστω $A_i$ το γεγονός ότι στην i επιλογή ο A παίκτης επιλέγει τη λευκή σφαίρα, $B_i$ το γεγονός ότι στην i επιλογή B παίκτης επιλέγει τη λευκή σφαίρα, και A το γεγονός ότι θα κερδίσει ο A παίκτης (αν ξεκινήσει αυτός την επιλογή).
- Για να συμβεί το γεγονός A θα πρέπει,

$$A = A_1 \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap A_3\right)$$

- ενώ, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι,

$$P(A) = P(A_1) + P\left(\bar{A}_1 \cap \bar{B}_2 \cap A_3\right) - 0$$

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{B}_2 | \bar{A}_1) \cdot P(A_3 | \bar{A}_1 \cap \bar{B}_2)$$

$$P(A) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

Πολλαπλασιαστικός κανόνας

# Δεσμευμένη πιθανότητα (ή πιθανότητα υπό συνθήκη)

# Πολλαπλασιαστικός κανόνας

- Η πιθανότητα της ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο γεγονότων A και B, τα οποία ανήκουν στον ίδιο δειγματοχώρο, περιγράφεται από την εξίσωση,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

ή, ισοδύναμα,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- Το πολλαπλασιαστικό θεώρημα μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερα από δύο γεγονότα, όπως ακολουθεί,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))\ldots P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{(n-1)}))$$

# Παράδειγμα 3 (1/3)

- Ρίχνουμε ένα ζάρι 6 φορές.
- Ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν 6 διαφορετικά νούμερα στις 6 ρίψεις;

# Παράδειγμα 3 (2/3)

- Έστω Α το γεγονός να έρθουν 6 διαφορετικά νούμερα στις 6 ρίψεις.
- Επίλυση με βάση την **κλασική μέθοδο**.
- Όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να έρθουν 6 διαφορετικά νούμερα είναι (6!).
- Όλες οι δυνατές εξάδες που μπορούν να προκύψουν αν ρίξουμε ένα ζάρι 6 φορές είναι το καρτεσιανό γινόμενο των 6 απλούστερων δειγματικών χώρων που αφορούν στην κάθε ρίψη του ζαριού ή $6^6$.
- Η πιθανότητα του γεγονότος Α είναι: $P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{6!}{6^6}$

# Παράδειγμα 3 (3/3)

- Επίλυση με βάση τον **πολλαπλασιαστικό κανόνα ή θεώρημα**.
- Το γεγονός A μπορεί να οριστεί από τη σχέση,

  $$A=\left(A_1\cap A_2\cap A_3\ldots\cap A_6\right)$$

  όπου,

  $A_i$ το γεγονός στη ρίψη i θα έρθει αριθμός διάφορος από ότι στην i-1, i-2 … 1 ρίψη.
- Η πιθανότητα του γεγονότος A, είναι:

$$P\left(A\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\middle|A_1\right)\cdot P\left(A_3\middle|\left(A_1\cap A_2\right)\right)\ldots P\left(A_6\middle|\left(A_1\cap A_2\cap A_3\ldots\cap A_5\right)\right)$$

$$=\quad \frac{6}{6}\frac{5}{6}\frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6}\frac{1}{6}=\frac{6!}{6^6}$$

# Αρχές απαρίθμησης

# Αρχές απαρίθμησης

- Κανόνας του γινομένου.
- Μεταθέσεις n πραγμάτων.
- Μεταθέσεις n πραγμάτων ανά κ.
- Συνδυασμοί n πραγμάτων ανά κ.

# Κανόνας του γινομένου

- Έστω ένα σύνθετο πείραμα Ε που συνίσταται στην εκτέλεση κ απλών πειραμάτων $E_1$, $E_2$, ..., $E_κ$, των οποίων οι αντίστοιχοι δειγματικοί χώροι είναι $S_1$, $S_2$,…, $S_κ$. Ο δειγματικός χώρος S του πειράματος Ε, ο οποίος περιέχει όλα τα πιθανά αποτελέσματα του σύνθετου πειράματος Ε προκύπτει από το **καρτεσιανό γινόμενο**,

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_\kappa$$

- Το πλήθος, n, όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του Ε είναι ο **κανόνας του γινομένου**,

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_\kappa$$

όπου $n_1$, $n_2$,…, $n_κ$, παριστάνουν αντίστοιχα τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων των κ απλών δειγματοχώρων $S_1$, $S_2$,…, $S_κ$.

# Μεταθέσεις n αντικειμένων

- Ο αριθμός των **μεταθέσεων** ενός συνόλου από **n αντικείμενα**, λαμβάνοντάς τα όλα μαζί, είναι,

  $_nP_n = n!$

# Μεταθέσεις n αντικειμένων ανά κ

- Έστω n διαφορετικά αντικείμενα. Επιλέγουμε κ από αυτά και τα τοποθετούμε σε μια σειρά. Ο αριθμός των **μεταθέσεων των n αντικειμένων**, λαμβάνοντάς τα **ανά κ** είναι,

$$P(n,\kappa)=\frac{n!}{(n-\kappa)!}$$

# Συνδυασμοί n αντικειμένων ανά κ

- Έστω n διαφορετικά αντικείμενα. Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ από αυτά χωρίς να αναφερόμαστε στη σειρά είναι γνωστός σαν οι **συνδυασμοί n αντικειμένων ανά κ**, και δίνεται από τον κανόνα,

$$C(n,\kappa)=\frac{n!}{(n-\kappa)!\,\kappa!}$$

Ορισμός - Παραδείγματα

# Ολική πιθανότητα

# Διαμέριση δειγματικού χώρου

- Τα γεγονότα $A_1$, $A_2$,..., $A_\kappa$ αποτελούν **διαμέριση του δειγματικού χώρου S**, αν

  1. είναι ασυμβίβαστα,

  $$A_i \cap A_j = 0$$

  για κάθε i≠j.

  2. η ένωσή τους καταλαμβάνει όλο τον δειγματικό χώρο,

  $$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\kappa = S$$

  3. $P(A_i)>0$ για κάθε i.

# Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

- Εάν τα γεγονότα $A_1$, $A_2$,..., $A_κ$ αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου S, η πιθανότητα ενός γεγονότος E, οριζόμενο στον ίδιο δειγματικό χώρο, ορίζεται από τη σχέση,

$$P(E)=P(E|A_1)P(A_1)+P(E|A_2)P(A_2)+\ldots+P(E|A_\kappa)P(A_\kappa)$$

# Παράδειγμα 4 (1/2)

- Έστω σε μια παραγωγή το 70% προέρχεται από τη μηχανή 1 και το 30% από τη μηχανή 2.
- Η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό εάν προέρχεται από τη μηχανή 1 είναι 5%.
- Η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό εάν προέρχεται από τη μηχανή 2 είναι 10%.
- Εάν πάρουμε τυχαία ένα προϊόν, ποια είναι η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;

# Παράδειγμα 4 (2/2)

- Ισχύει:

  $P(M_1) = 0,70$

  $P(M_2) = 0,30$

  $P(E|M_1) = 0,05$

  $P(E|M_2) = 0,10$

- Η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό είναι,

  $P(E) = P(M_1)P(E|M_1) + P(M_2)P(E|M_2)$

  = 0,70 (0,05) + 0,30 (0,10) = 0,065.

# Παράδειγμα 5 (1/2)

- Έστω τρία κουτιά, που το κάθε ένα έχει από 2 σφαίρες: το πρώτο έχει δύο λευκές, το δεύτερο δύο μαύρες και το τρίτο μία λευκή και μία μαύρη.
- Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα τρία κουτιά.
- Στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από μέσα.
- Ποια είναι η πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι λευκή;

# Παράδειγμα 5 (2/2)

- Έστω $A_i$ το γεγονός κατά το οποίο επιλέγουμε το i κουτί.
- Η πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι λευκή είναι,

$$P(\Lambda)=P(A_1)P(\Lambda|A_1)+P(A_2)P(\Lambda|A_2)+P(A_3)P(\Lambda|A_3)$$

$$= \frac{1}{3}1+\frac{1}{3}0+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

# Παράδειγμα 6 (1/3)

- Σε ένα εργοστάσιο που παράγει σιδηροδοκούς το 80% είναι καλές και το 20% ελαττωματικές.
- Κάθε σιδηροδοκός περνάει από έλεγχο (μηχάνημα), που όμως δεν είναι αξιόπιστος. Όταν ο έλεγχος είναι θετικός, η δοκός θεωρείται ελαττωματική.
- Η πιθανότητα η σιδηροδοκός να είναι καλή αλλά ο έλεγχος να είναι θετικός είναι 10%, επομένως η πιθανότητα η σιδηροδοκός να είναι καλή και ο έλεγχος να είναι αρνητικός είναι 90%.
- Η πιθανότητα η σιδηροδοκός να είναι ελαττωματική και ο έλεγχος να είναι θετικός είναι 80%, επομένως η πιθανότητα η σιδηροδοκός να είναι ελαττωματική αλλά ο έλεγχος να είναι αρνητικός είναι 20%.

# Παράδειγμα 6 (2/3)

- Με δεδομένο ότι όταν ο έλεγχος είναι θετικός η σιδηροδοκός καταστρέφεται, ποιο είναι το ποσοστό των ράβδων που καταστρέφονται;
- Από τις δοκούς που καταστρέφονται, τι ποσοστό είναι καλές;

# Παράδειγμα 6 (3/3)

- Ισχύει:

  $P(A_1) = 0,80$ και $P(A_2) = 0,20$

  $P(\Theta | A_1) = 0,10 \qquad P(\bar{\Theta} | A_1) = 0,90$

  $P(\Theta | A_2) = 0,80 \qquad P(\bar{\Theta} | A_2) = 0,20$

- Το ποσοστό των ράβδων που καταστρέφονται είναι η πιθανότητα:

  $$P(\Theta) = P(A_1) P(\Theta | A_1) + P(A_2) P(\Theta | A_2)$$

  $= 0,80\,(0,10) + 0,20\,(0,80) = 0,24.$

Θεώρημα Bayes

# Ολική πιθανότητα

# Θεώρημα Bayes

- Αν τα γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου S, και B είναι ένα γεγονός το οποίο σχετίζεται με τον ίδιο χώρο S, η υπό συνθήκη πιθανότητα

$$P(A_i|B)$$

ορίζεται από τη σχέση

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

όπου i = 1,2,…,κ

# Παράδειγμα 6 (Θεώρημα Bayes)

- Από τις δοκούς που καταστρέφονται, το ποσοστό εκείνων που είναι καλές δίνεται από τη σχέση:

$$P\left(A_1 \middle| \Theta\right) = \frac{P\left(A_1\right) P\left(\Theta \middle| A_1\right)}{P\left(\Theta\right)} = \frac{0{,}08}{0{,}24} = \frac{1}{3}$$

- Προκειμένου να περιορίσουμε το ποσοστό των σιδηροδοκών που καταστρέφονται αποφασίζουμε να κάνουμε 2 ελέγχους.
- Στην περίπτωση αυτή, υπολογίζεται αντίστοιχα το ζητούμενο ποσοστό για 2 θετικούς ελέγχους.

Ορισμός

# Στατιστική ανεξαρτησία

# Στατιστικά ανεξάρτητα γεγονότα

- Δύο γεγονότα A και B, οριζόμενα στον ίδιο δειγματικό χώρο με πιθανότητες P(B)≠0 και  P(A)≠0, είναι ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

# Ασκήσεις

# Άσκηση 1

- Τρία αντικείμενα A, B και Γ τοποθετούνται σε μία σειρά.
- Ορίζουμε τα γεγονότα,

  W: το B δεξιά του A (όχι κατ΄ ανάγκη δίπλα του) και

  R: το Γ δεξιά του A (όχι κατ΄ ανάγκη δίπλα του).
- Να ελέγξετε αν τα γεγονότα W και R είναι ανεξάρτητα.

# Τρόπος επίλυσης άσκησης 1

- Ισχύει:

  S = {ΑΒΓ, ΑΓΒ, …}

  W = {ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΓΑΒ}

  R = {ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ}

  $W \cap R$ = {ΑΒΓ, ΑΓΒ}

- Με τον κλασσικό τρόπο, υπολογίζουμε τις πιθανότητες P(W), P(R) και $P\left(W \cap R\right)$

  και ελέγχουμε εάν ισχύει η εξίσωση της ανεξαρτησίας.

# Άσκηση 2 (1/2)

- Έστω οι πηγές ρύπανσης της ατμόσφαιρας:

  Βιομηχανία (Β), αυτοκίνητα (Α) και καυστήρες (Κ).

- Η πιθανότητα περιορισμού της ρύπανσης που προέρχεται από τις αντίστοιχες πηγές (λόγω μέτρων της κυβέρνησης) είναι:

  P(Β) = 0,80, P(Α) = 0,70 και P(Κ) = 0,50.

# Άσκηση 2 (2/2)

- Η πιθανότητα επιτυχίας των μέτρων της κυβέρνησης είναι:
- $P\left(E \middle| A_0\right) = 0$ εάν καμία από τις πηγές ρύπανσης δεν περιοριστεί επιτυχώς,
- $P\left(E \middle| A_1\right) = 0{,}50$ εάν μόνο μία από τις πηγές ρύπανσης περιοριστεί επιτυχώς,
- $P\left(E \middle| A_2\right) = 0{,}80$ εάν μόνο δύο από τις πηγές ρύπανσης περιοριστούν επιτυχώς,
- $P\left(E \middle| A_3\right) = 1$ εάν και οι τρεις πηγές ρύπανσης περιοριστούν επιτυχώς.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα επιτυχίας των μέτρων P(E).

# Επίλυση άσκησης 2 (1/2)

- Τα γεγονότα $A_0$, $A_1$, $A_2$ και $A_3$ αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου.
- Εφαρμόζω την ολική πιθανότητα

$$P(E)=P(A_0)P(E|A_0)+P(A_1)P(E|A_1)+P(A_2)P(E|A_2)+P(A_3)P(E|A_3)$$

- Είναι:

$$P(A_0)=1-P(A\cup B\cup K)$$

$$P(A_1)=P(B\cap\bar{A}\cap\bar{K})+P(A\cap\bar{B}\cap\bar{K})+P(K\cap\bar{B}\cap\bar{A})$$

όπου

$$P(B\cap\bar{A}\cap\bar{K})=P(B)P(\bar{A})P(\bar{K})=0,80(0,30)(0,50)$$

# Επίλυση άσκησης 2 (2/2)

- Τέλος,

$$P(A_2)=P(A\cap B)+P(K\cap B)+P(A\cap K)-3P(A\cap B\cap K)$$

$$P(A_3)=P(A\cap B\cap K)$$

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Μπατζιάκα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Βιβλιογραφία


1. "Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς", Γεώργιος Χ. Ζιούτας, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/484966
2. "Εφαρμογές Πιθανοτήτων και Στατιστικής στη Μελέτη και Προγραμματισμό Τεχνικών Έργων", A. H.-.S Ang και W.H. Tang, μετάφραση Δ. Παναγιωτακόπουλος, εκδόσεις Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/887881
3. Σημειώσεις για το Μέρος Α του μαθήματος, Γιώργος Ζιούτας. http://users.auth.gr/DKUGIU/Teach/ChemicalEngineer/zioutasbook.pdf.
4. Σημειώσεις για το Μέρος Β του μαθήματος, Δημήτρης Κουγιουμτζής, ανατύπωση ΑΠΘ, 2009. http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChemicalEngineer/index.html.

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.