ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

Ενότητα 3η: Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών – Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Χημικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας (1/2)

1. Χαρακτηριστικά Τυχαίων μεταβλητών.
   1. Μέση τιμή.
   2. Διακύμανση.
   3. Διάμεσος.
   4. Επικρατέστερη τιμή.

Περιεχόμενα ενότητας (2/2)

2. Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.
    i. Κατανομή Bernoulli.
    ii. Διωνυμική Κατανομή.
    iii. Γεωμετρική Κατανομή.
    iv. Κατανομή Poisson.

Σκοποί ενότητας

- Εκτίμηση χρήσιμων χαρακτηριστικών των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής, όταν δεν είναι γνωστή η κατανομή πιθανότητας f(x).
- Εκτίμηση παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την κατανομή πιθανότητας.
- Μαθηματική έκφραση ειδικών κατανομών.
- Κατανόηση των υποθέσεων για την περιγραφή καταστάσεων στον πραγματικό κόσμο από τα μοντέλα των κατανομών.

Μέση Τιμή – Διακύμανση – Διάμεσος – Επικρατέστερη Τιμή

Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών

Ορισμός – Παραδείγματα

Μέση Τιμή

Μέση τιμή διακριτής τυχαίας μεταβλητής

- Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών x_1, x_2, x_3,..., x_n,... και συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $f(x_i)=p(x_i)$ (για i=1,2,3, ...,n,...), ορίζουμε μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της X ή μαθηματική ελπίδα της X και δηλώνουμε μ ή E(X), την τιμή

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Μέση τιμή συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

- Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x_i)$, ορίζουμε παρόμοια την αναμενόμενη τιμή της X ή μαθηματική ελπίδα E(X),

$$\mu = E(X) = \int_{i=1}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Παράδειγμα 1 (1/2)

- Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι.
- Όλες οι δυνατές τιμές είναι $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Να βρεθεί η μέση τιμή της X.

Παράδειγμα 1 (2/2)

- Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας μας δίνει

  $P(X=1) = 1/6$

  $P(X=2) = 1/6$

  ...

  $P(X=6) = 1/6$.

- Σύμφωνα με τον ορισμό, η μέση τιμή E(X) είναι:

$$E\left(X\right)=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+...+6\frac{1}{6}=3,5$$

Παράδειγμα 2 (1/2)

- Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το χρόνο λειτουργίας ενός μηχανήματος.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι εκθετικής μορφής:

  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος λειτουργίας;

Παράδειγμα 2 (2/2)

- Σύμφωνα με τον ορισμό, ο αναμενόμενος χρόνος λειτουργίας E(X) είναι:

$$E\left(X\right)=\int_{0}^{\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx=\ldots=\frac{1}{\lambda}$$

Παράδειγμα 3 (1/2)

- Έστω τυχαία μεταβλητή X που έχει ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας στο διάστημα [α, β].
- Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι:

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha} \quad \text{για } \alpha \leq x \leq \beta$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{αλλού}$$

- Να βρεθεί η μέση τιμή της X.

Παράδειγμα 3 (2/2)

- Σύμφωνα με τον ορισμό, ο αναμενόμενος χρόνος λειτουργίας E(X) είναι:

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\beta-\alpha}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} x\,\frac{1}{\beta-\alpha}\,dx=\ldots=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Ιδιότητες

Μέση Τιμή

Ιδιότητες Μέσης Τιμής

1. Εάν α και β είναι κάποιες σταθερές, τότε,

   E(αX+β) = αE(X)+β

2. Εάν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας f(x) = p(x), τότε για κάθε πραγματική συνάρτηση g(x) έχουμε,

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{x} g(x)p(x)$$

   Επίσης, εάν η X είναι συνεχής ισχύει παρόμοια,

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Ορισμός – Ιδιότητες – Παραδείγματα

Διακύμανση

Διακύμανση – Τυπική απόκλιση

- Εάν X είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ, τότε η διακύμανση της X, η οποία συμβολίζεται με Var(X) ή σ^2_x, ορίζεται ως ακολούθως:

  $Var(X) = E[(X-\mu)^2]$.

- Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης Var(X), ονομάζεται τυπική απόκλιση της X:

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$$

Ιδιότητες Διακύμανσης

1. Εάν α και β είναι κάποιες σταθερές, τότε,

   $Var(\alpha X+\beta) = \alpha^2 \, Var(X)$

2. Ισχύει:

$$Var(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left(X^2-2X\mu+\mu^2\right)=E\left(X^2\right)-\mu^2$$

Παράδειγμα 4 (1/3)

- Έστω X μεταβλητή που παίρνει ισοπίθανα τιμές από το 0 μέχρι το 1.

  X=[0,1]

- Ποια είναι η μέση τιμή της X, της αX+β και της X^2;
- Ποια είναι η διακύμανση της X, της αX+β και της X^2;

Παράδειγμα 4 (2/3)

- Ισχύει f(x) = 1
- Επιπλέον, είναι:

$$E\left(X\right)=\frac{1}{2}$$

$$E\left(\alpha X+\beta\right)=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)+\beta$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2\left(1\right)dx=\frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 4 (3/3)

- Αναφορικά με τη διακύμανση είναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{12}$$

- Αντίστοιχα, υπολογίζονται οι τιμές των διακυμάνσεων Var(αX+β) και Var(X^2)

Παράδειγμα 5 (1/3)

- Ο χρόνος λειτουργίας X ενός μηχανήματος είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εκθετικής μορφής,

  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

- Να βρεθεί η τυπική απόκλιση του χρόνου λειτουργίας του μηχανήματος.

Παράδειγμα 5 (2/3)

- Έχουμε αποδείξει ότι:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Επιπλέον, ισχύει:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

όπου

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \ldots = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Παράδειγμα 5 (3/3)

- Τελικά, με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$Var(X) = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ορισμός

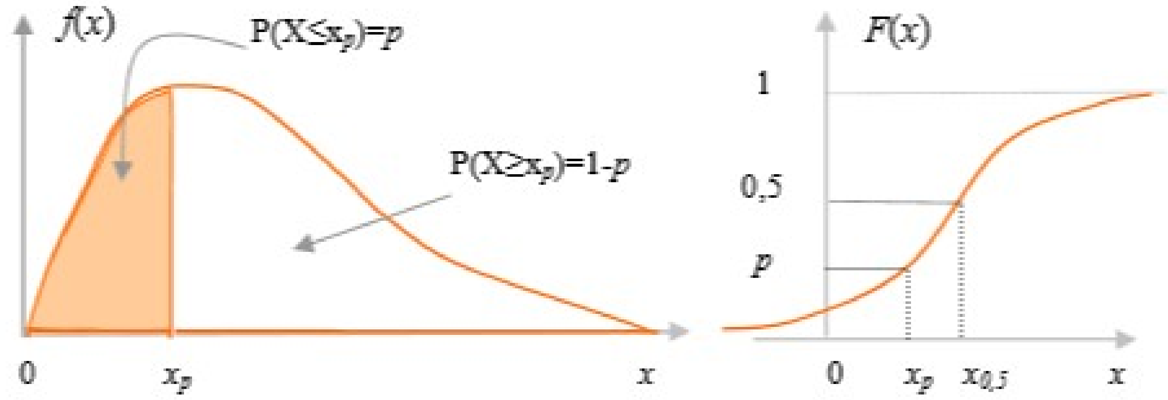
q-Ποσοστιαίο σημείο – Διάμεσος – Επικρατέστερη τιμή – Τυποποιημένη Χ

q – Ποσοστιαίο Σημείο

- Κάθε πραγματικός αριθμός x_q ονομάζεται **q-ποσοστιαίο** σημείο της τυχαίας μεταβλητής X αν ισχύει:

  $P(X \le x_q) = q$ και $P(X \ge x_q) = 1-q$

Γραφική παράσταση q-ποσοστιαίου σημείου



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση q-ποσοστιαίου σημείου

Διάμεσος

- Κάθε πραγματικός αριθμός ονομάζεται **διάμεσος** της τυχαίας μεταβλητής X, και συμβολίζεται με m ή M, εάν ισχύει

  $P(X \leq m) = 0,5$ και $P(X \geq m) = 0,5$

Επικρατέστερη τιμή

- Σε μια τυχαία μεταβλητή X, ονομάζουμε **επικρατέστερη ή συχνότερη τιμή** μία τιμή του πεδίου των τιμών της X, η οποία **μεγιστοποιεί** τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας f(x). Συνήθως, η επικρατέστερη τιμή της X συμβολίζεται με το γράμμα **T**.

Τυποποιημένη Χ

- Μια τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή είναι μια μεταβλητή με μηδέν μέση τιμή και διακύμανση ίση με ένα. Κάθε τυχαία μεταβλητή Χ μπορεί να τυποποιηθεί αφαιρώντας από αυτή τη μέση τιμή της μ_x και διαιρώντας με την τυπική της απόκλιση σ_x,

$$Z = \frac{(X - \mu_x)}{\sigma_x}$$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Bernoulli – Διωνυμική – Γεωμετρική - Poisson

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

Ορισμός

Κατανομή Bernoulli

Κατανομή Bernoulli (1/3)

- Ένα πείραμα τύχης ή ένας απλός έλεγχος λέγεται **δοκιμή Bernoulli** εάν

  - όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο, A = "επιτυχία", $S=\{A,\bar{A}\}, A=επιτυχία\, και\, \bar{A}=αποτυχία$

  - υπάρχει σταθερή πιθανότητα p για την "επιτυχία" και 1-p για την "αποτυχία", $P(A)=p\, και\, P(\bar{A})=1-p$

  και καλείται κατανομή Bernoulli.

Κατανομή Bernoulli (2/3)

- Η τυχαία μεταβλητή X, καλείται μεταβλητή Bernoulli και αντιστοιχεί την τιμή 1 στο A και 0 στο $\bar{A}$.
- Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβλητής Bernoulli είναι αντίστοιχα:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_i x_i^2 f(x_i) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Κατανομή Bernoulli (3/3)

- Μια σειρά από n δοκιμές Bernoulli λέγεται **διαδικασία ή ακολουθία Bernoulli** εάν

  - σε κάθε δοκιμή έχουμε σταθερή πιθανότητα “επιτυχίας” p,

  - οι n δοκιμές είναι στατιστικώς ανεξάρτητες.

- Έστω μια ακολουθία Bernoulli με n ανεξάρτητες δοκιμές, όπου έχουμε ακριβώς x επιτυχίες και, κατά συνέπεια, ακριβώς n-x αποτυχίες. Η πιθανότητα P να συμβεί η συγκεκριμένη ακολουθία Bernoulli είναι:

  $P = p^x(1-p)^{n-x}$

Ορισμός – Παραδείγματα

Διωνυμική Κατανομή

Διωνυμική Κατανομή (1/3)

- Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται **Διωνυμική μεταβλητή** αν πληρούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες

  1) Υπάρχουν n επαναλαμβανόμενες **δοκιμές Bernoulli** οι οποίες είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

  2) Όλες οι δοκιμές έχουν την ίδια **σταθερή πιθανότητα** “επιτυχίας”, P(A)=p.

  3) Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται ως ακολούθως:

  X= {αριθμός επιτυχιών (φορές το γεγονός A) στις n δοκιμές Bernoulli}.

Διωνυμική Κατανομή (2/3)

- Η Διωνυμική συνάρτηση μάζας πιθανότητας για να κατορθώσουμε x “επιτυχίες” σε n ανεξάρτητες δοκιμές, ενός πειράματος τύχης με πιθανότητα “επιτυχίας” p σε κάθε δοκιμή είναι:

$$P(X=x)=C(n,\kappa)p^{x}(1-p)^{(n-x)}=\frac{n!}{(n-\kappa)!\,\kappa!}p^{x}(1-p)^{(n-x)}$$

Διωνυμική Κατανομή (3/3)

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της Διωνυμικής μεταβλητής είναι αντίστοιχα:

$$E(X) = \sum_{x_i=0}^{n} x_i P(X = x_i) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Παράδειγμα 6 (1/2)

- Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι 20 φορές.
- Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε 5 άσσους;

Παράδειγμα 6 (2/2)

- Κάθε φορά που ρίχνουμε το ζάρι έχουμε δοκιμή Bernoulli.
- Έχουμε τις προϋποθέσεις της διωνυμικής κατανομής, οπότε ισχύει:

$$P(X=5)=C(20,5)\,p^{5}(1-p)^{15}=\frac{20!}{(20-5)!\,5!}\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{15}$$

Παράδειγμα 7 (1/2)

- Κάθε δείγμα ενός κυβικού μέτρου αέρα έχει πιθανότητα να περιέχει ένα σπάνιο μόριο P = 0,10.
- Έστω ότι κάνεις δοκιμές σε 18 τέτοια δείγματα.
- Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς 2 από αυτά να περιέχουν το σπάνιο μόριο;

Παράδειγμα 7 (2/2)

- Η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των δειγμάτων μεταξύ των 18 (n = 18) που περιέχουν το σπάνιο μόριο παίρνει τιμές X={0,1,2,...,18}.
- Έχουμε τις προϋποθέσεις της διωνυμικής κατανομής, οπότε ισχύει:

$$P(X=2)=C(18,2)\,p^2(1-p)^{(18-2)}=\frac{18!}{(18-2)!\,2!}(0{,}1)^2(0{,}9)^{16}$$

Ορισμός

Γεωμετρική Κατανομή

Γεωμετρική Κατανομή (1/3)

- Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι έχει **γεωμετρική κατανομή** αν πληρούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

  1) Υπάρχουν επαναλαμβανόμενες **δοκιμές Bernoulli** οι οποίες είναι στατιστικά **ανεξάρτητες**.

  2) Όλες οι δοκιμές έχουν την ίδια **σταθερή πιθανότητα** “επιτυχίας”, P(A)=p.

  3) Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται ως ακολούθως:

  X= {αριθμός δοκιμών μέχρι πραγματοποίησης για πρώτη φορά του γεγονότος A}.

Γεωμετρική Κατανομή (2/3)

- Το πεδίο τιμών της X είναι X={1,2,3,...}
- Η γεωμετρική συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι:

$$P(X=x)=(1-p)^{(x-1)}p$$

Γεωμετρική Κατανομή (3/3)

- Η μέση τιμή της μεταβλητής που έχει γεωμετρική κατανομή είναι:

$$E\left(X\right)=\sum_{x=1}^{\infty} x\,p^{x}\left(1-p\right)^{\left(x-1\right)}=\frac{1}{p}$$

Ορισμός

Κατανομή Poisson

Κατανομή Poisson (1/3)

- Μια διαδικασία με την οποία συμβαίνει ένα τυχαίο γεγονός Α πάνω στον άξονα του χρόνου t λέγεται **διαδικασία Poisson** αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

  1) Ο αριθμός πραγματοποίησης του Α σε χρονικό διάστημα t εξαρτάται μόνο από το μήκος του χρονικού διαστήματος και όχι από τα άκρα του διαστήματος.

  2) Υπάρχει ένα μικρό διάστημα Δt μέσα στο οποίο η εμφάνιση του Α περισσότερο από μία φορά είναι αμελητέα.

  3) Η πιθανότητα να συμβεί το Α μέσα στο Δt είναι το γινόμενο λ.Δt όπου λ είναι μια σταθερή παράμετρος.

Κατανομή Poisson (2/3)

- Μια τυχαία μεταβλητή X_t η οποία παριστάνει τον αριθμό εμφάνισης του A στο χρονικό διάστημα t σε μία **διαδικασία Poisson** ονομάζεται **μεταβλητή Poisson**, η δε συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας δίνεται από το **μοντέλο Poisson**:

$$P\left(X_t = x\right) = e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^x}{x!} \text{ για } x = 0,1,2,3,\ldots$$

όπου η παράμετρος λ παριστάνει τον μέσο αριθμό εμφάνισης του γεγονότος A στη μονάδα του χρόνου.

Κατανομή Poisson (3/3)

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβλητής Poisson είναι αντίστοιχα:

$$E\left(X_t\right)=\lambda t$$

$$Var\left(X_t\right)=\lambda t$$

Ασκήσεις

Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών – Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Άσκηση 1 (1/2)

- Η κατανάλωση πετρελαίου σε έναν τόπο είναι τυχαία (συνεχής) μεταβλητή X, η οποία μπορεί να πάρει τιμές από το 0 μέχρι το 500.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

  $f(x) = \alpha x \ (0 \le x \le 200)$

  $f(x) = \beta_1 x + \beta_2 \ (200 \le x \le 500)$

- Έχουν ήδη υπολογιστεί οι παράμετροι α, β_1 και β_2.

Άσκηση 1 (2/2)

- Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$F(x)=0,\ x<0$$

$$F(x)=\int_0^x \alpha u\, du\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 200$$

$$F(x)=\int_0^{200} a(u)du+\int_{200}^{x}(\beta_1 u+\beta_2)du\ ,\ 200\leq x\leq 500$$

$$F(x)=1,\ x>500$$

- Να βρεθεί η διάμεσος.

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τρόπος επίλυσης άσκησης 1

- Για τη μέση τιμή ισχύει:

$$E\left(X\right)=\int_{0}^{200} x\left(\alpha x\right)dx+\int_{200}^{500} x\left(\beta_{1x}+\beta_{2}\right)dx$$

- Για τη διάμεσο M ισχύει:

$$\int_{0}^{200} \left(\alpha x\right)dx+\int_{200}^{M} \left(\beta_{1}x+\beta_{2}\right)dx=0,5$$

- Επιλύουμε την εξίσωση και βρίσκουμε το M.

Άσκηση 2

- Τα σωματίδια σκόνης στην ατμόσφαιρα προκαλούν περιβαλλοντικό πρόβλημα. Με ένα ειδικό μικροσκόπιο παρατηρούμε τον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου.
- Ο μέσος αριθμός ανά μονάδα όγκου βρέθηκε 4,2 σωματίδια.
- Ποια είναι η πιθανότητα σε μια μονάδα όγκου να μη βρεθεί σωματίδιο, και ποια η πιθανότητα να βρεθούν 4 σωματίδια.
-

Επίλυση άσκησης 2 (1/2)

- Έστω $X_{t=1}$ η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των σωματιδίων στη μονάδα του όγκου του αέρα. Ισχύει:

  $X_{t=1} = \{0,1,2,...\}$

  $\lambda = E(X_{t=1}) = 4,2$

- Αρχικά αναζητούμε την πιθανότητα σε μια μονάδα όγκου να μη βρεθεί σωματίδιο ή $P(X_{t=1}=0)$. Πρόκειται για τυχαία μεταβλητή Poisson, και θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο.

Επίλυση άσκησης 2 (2/2)

- Η συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας που δίνεται από το μοντέλο Poisson είναι:

$$P\left(X_{t=1}=0\right)=e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{0}}{0!}=e^{-4,2}$$

Άσκηση 3

- Ο αριθμός ψεγαδιών πάνω σε μία μαγνητική ταινία ακολουθεί Poisson κατανομή με μέση τιμή λ = 0,2 ψεγάδια ανά μέτρο.
- Ποια είναι η πιθανότητα σε 10 μέτρα μαγνητικής ταινίας να μην έχει ψεγάδια.

Επίλυση άσκησης 3 (1/2)

- Η τυχαία μεταβλητή X_t παριστάνει τον αριθμό των ψεγαδιών ανά μέτρο μαγνητικής ταινίας. Ισχύει:

  $\lambda = E(X_t) = 0{,}2$

- Αναζητούμε την πιθανότητα σε 10 μέτρα μαγνητικής ταινίας να μην υπάρχει ψεγάδι ή $P(X_{t=10}=0)$. Πρόκειται για τυχαία μεταβλητή Poisson, και θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο.

Επίλυση άσκησης 3 (2/2)

- Η συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας που δίνεται από το μοντέλο Poisson είναι:

$$P\left(X_{t=10}=0\right)=e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{0}}{0!}=e^{-0,2\left(10\right)}=e^{-2}$$

Άσκηση 4

- Το κόστος εκτέλεσης ενός πειράματος είναι 100.000.
- Εάν το πείραμα αποτύχει, ένα επιπλέον κόστος των 30.000 επιβαρύνει την επόμενη εκτέλεση του πειράματος.
- Εάν το πείραμα εκτελείται μέχρι να επιτύχει και αν η κάθε εκτέλεση έχει σταθερή πιθανότητα επιτυχίας P = 0,4, ποιο είναι το αναμενόμενο κόστος της συνολικής διαδικασίας, αν υπάρχει στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ των εκτελέσεων του πειράματος;

Επίλυση άσκησης 4

- Ορίζουμε το κόστος του πειράματος ως εξής:

  70.000 + E(X)(30.000)

- Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει τον αριθμό των δοκιμών του πειράματος μέχρι να πετύχει το πείραμα.
- Το X ακολουθεί γεωμετρική τιμή, οπότε εφαρμόζω την έκφραση της γεωμετρικής κατανομής για τη μέση τιμή και επιλύω την άσκηση.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Γεώργιος Ζιούτας. «Στατιστική. Ενότητα 3η: Χαρακτηριστικά Τυχαίων Μεταβλητών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS248/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Βιβλιογραφία

1. "Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς", Γεώργιος Χ. Ζιούτας, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/484966
2. "Εφαρμογές Πιθανοτήτων και Στατιστικής στη Μελέτη και Προγραμματισμό Τεχνικών Έργων", A. H.-.S Ang και W.H. Tang, μετάφραση Δ. Παναγιωτακόπουλος, εκδόσεις Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/887881
3. Σημειώσεις για το Μέρος Α του μαθήματος, Γιώργος Ζιούτας. http://users.auth.gr/DKUGIU/Teach/ChemicalEngineer/zioutasbook.pdf.
4. Σημειώσεις για το Μέρος Β του μαθήματος, Δημήτρης Κουγιουμτζής, ανατύπωση ΑΠΘ, 2009. http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChemicalEngineer/index.html.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Μπατζιάκα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.