ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

Ενότητα 4η: Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας Διακριτής και Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Χημικών Μηχανικών Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή.
   i. Κατανομή Poisson.
2. Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας για Συνεχή Τυχαία Μεταβλητή.
   i. Ομοιόμορφη κατανομή.
   ii. Εκθετική κατανομή.
   iii. Κανονική κατανομή.

Σκοποί ενότητας

- Μαθηματική έκφραση ειδικών κατανομών.
- Κατανόηση των υποθέσεων για την περιγραφή καταστάσεων στον πραγματικό κόσμο από τα μοντέλα των κατανομών.

Κατανομή Poisson

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

Μαθηματική έκφραση - Παράδειγμα

Κατανομή Poisson

Κατανομή Poisson

- Έχει αναφερθεί ότι η συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας της μεταβλητής **Poisson** δίνεται από τη σχέση:

$$P(X_t = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!} \text{ για } x = 0,1,2,3,\ldots$$

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβλητής Poisson είναι αντίστοιχα:

$$E(X_t) = \lambda t \qquad\qquad Var(X_t) = \lambda t$$

Παράδειγμα 1 (1/3)

- Σε έναν μετρητή καταφθάνουν 10^2 σωματίδια ανά λεπτό.
- Ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο λεπτό να καταφθάσουν 100 σωματίδια;
- Ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο δευτερόλεπτο να καταφθάσουν 100 σωματίδια;

Παράδειγμα 1 (2/3)

- Έστω $X_{t=1}$ η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των σωματιδίων που καταφθάνουν στον μετρητή ανά λεπτό. Ισχύει:

  $\lambda = E(X_{t=1}) = 10^2$

- Αναζητούμε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να καταφθάσουν στον μετρητή 100 σωματίδια ή $P(X_{t=1}=100)$. Πρόκειται για τυχαία μεταβλητή Poisson, και θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο.

Παράδειγμα 1 (3/3)

- Η συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας που δίνεται από το μοντέλο Poisson είναι:

$$P\left(X_{t=1\lambda}=100\right)=e^{-100}\frac{\left(100\right)^{100}}{100!}\approx 0{,}04$$

- Αντίστοιχα, η πιθανότητα το επόμενο δευτερόλεπτο να καταφθάσουν 100 σωματίδια είναι:

$$P\left(X_{t=1\delta}=100\right)=e^{-100\left(\frac{1}{60}\right)}\frac{\left(100/60\right)^{100}}{100!}\approx 0$$

Ομοιόμορφη – Εκθετική – Κανονική

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

Ορισμός

Ομοιόμορφη Κατανομή

Ομοιόμορφη κατανομή (1/2)

- Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ, η οποία μπορεί να πάρει τιμές παντού στο διάστημα [α,β], όπου α και β πεπερασμένοι αριθμοί, ονομάζεται **ομοιόμορφη μεταβλητή** εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση,

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \gamma\iota\alpha\ \alpha\leq x\leq\beta \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{Bmatrix}$$

- Λέμε, επίσης, ότι η Χ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [α,β].

Ομοιόμορφη Κατανομή (2/2)

- Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή και η διακύμανση της ομοιόμορφης μεταβλητής είναι αντίστοιχα:

$$F(x)=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$E(X)=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$Var(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Δημιουργία - Παράδειγμα

Τυχαίοι αριθμοί

Παράδειγμα 2 (1/2)

- Σε μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία παριστάνει τον χρόνο καλής λειτουργίας ενός συστήματος, η αθροιστική κατανομή πιθανότητας είναι

  $F_x(x) = 1\text{-}e^{-\lambda x}$

- Πώς θα δημιουργήσουμε ένα τυχαίο δείγμα το οποίο θα παριστάνει τους χρόνους λειτουργίας n τέτοιων συστημάτων;

Παράδειγμα 2 (2/2)

- Με τον υπολογιστή μας επιτυγχάνουμε από την ομοιόμορφη [0,1] τυχαίο δείγμα τιμών u_1, u_2,..., u_n.
- Θέτουμε για κάθε τιμή u_κ, $u_\kappa=1-e^{-\lambda\kappa,}$.
- Μετασχηματίζουμε ως προς x_κ, $x_\kappa = (1/\lambda)\ ln(1-u_\kappa)$.
- Οι προκύπτουσες τιμές x_1, x_2,..., x_n είναι τυχαίο δείγμα τιμών από τη μεταβλητή X, η οποία ακολουθεί την κατανομή $F_x(x) = 1-e^{-\lambda x}$.

Ορισμός – Ιδιότητα

Εκθετική Κατανομή

Εκθετική Κατανομή (1/2)

- Η τυχαία μεταβλητή X η οποία παριστάνει την απόσταση μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων Poisson γεγονότων, ακολουθεί **εκθετική κατανομή** με παράμετρο λ,

$$f\left(x\right)=\begin{Bmatrix} \lambda e^{-\lambda x} & \gamma\iota\alpha\, 0\leq x<\infty \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{Bmatrix}$$

Εκθετική Κατανομή (2/2)

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβλητής που ακολουθεί εκθετική κατανομή είναι αντίστοιχα:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Εκθετική Κατανομή – Έλλειψη μνήμης

- Η εκθετική κατανομή έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης:

$$P\left(X>s+t \mid X>s\right)=P\left(X>t\right)$$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ασκήσεις

Κατανομή Poisson - Εκθετική Κατανομή

Άσκηση 1

- Τα σωματίδια σκόνης στην ατμόσφαιρα προκαλούν περιβαλλοντικό πρόβλημα. Με ένα ειδικό μικροσκόπιο παρατηρούμε τον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου.
- Ο μέσος αριθμός ανά μονάδα όγκου βρέθηκε 4,2 σωματίδια.
- Ποια είναι η πιθανότητα σε μια μονάδα όγκου να μη βρεθεί σωματίδιο.

Λύση άσκησης 1 (1/2)

- Έστω X_t η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των σωματιδίων στη μονάδα του όγκου του αέρα. Ισχύει:

  $X_t = \{0,1,2,...\}$

  $\lambda = 4,2$

- Αρχικά αναζητούμε την πιθανότητα σε μια μονάδα όγκου να μη βρεθεί σωματίδιο ή $P(X_t=0)$. Πρόκειται για τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson, και θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο.

Λύση άσκησης 1 (2/2)

- Η συνάρτηση κατανομής μάζας πιθανότητας που δίνεται από το μοντέλο Poisson είναι:

$$P\left(X_{t=1}=0\right)=e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{0}}{0!}=e^{-4,2}$$

Άσκηση 2

- Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή το 10.
- Ποια είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 10;
- Να βρεθεί η τιμή της x για την οποία ισχύει:

  $P(X<x) = 0,95$

Λύση άσκησης 2 (1/2)

- Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί εκθετική κατανομή είναι:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=10\Rightarrow \lambda=0{,}1$$

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

- Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 10 είναι:

$$P(X>10)=e^{-\lambda x}=e^{-0{,}1(10)}$$

Λύση άσκησης 2 (2/2)

- Η τιμή της x για την οποία ισχύει $P(X<x) = 0,95$ προκύπτει από την εξίσωση:

  $1-e^{-\lambda x} = 0,95$ ή $e^{-\lambda x} = 0,05$ ή $\lambda x = \ln(0,05)$

Άσκηση 3

- Ο αριθμός ψεγαδιών πάνω σε μία μαγνητική ταινία ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο αριθμό $\lambda = 0{,}2$ ψεγάδια ανά μέτρο.
- Έστω X η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ψεγαδιών.
- Ποια είναι η μέση τιμή της X;
- Ποια είναι η πιθανότητα στα επόμενα 10 συνεχή μέτρα μαγνητικής ταινίας να μην έχει ψεγάδια;

Λύση άσκησης 3 (1/2)

- E(X) = 1/λ = 5 μ.
- Αναζητούμε την πιθανότητα στα επόμενα 10 συνεχή μέτρα μαγνητικής ταινίας να μην υπάρχουν ψεγάδια ή P(X>0). Ισχύει:

$$P\left(X > 10\right) = e^{-\lambda\left(10\right)}$$

Λύση άσκησης 3 (2/2)

- Επίλυση με το μοντέλο Poisson:

$$P\left(Y_{t=10}=0\right)=e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^{0}}{0!}=e^{-\lambda(10)}$$

Ορισμός

Κανονική Κατανομή

Κανονική Κατανομή

- Η τυχαία μεταβλητή Χ η οποία υποτίθεται ότι μπορεί να πάρει τιμές -∞<x<∞, έχει κανονική **κατανομή** ή κατανομή Gauss εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \gamma\iota\alpha -\infty<x<\infty$$

όπου μ και σ είναι οι παράμετροι της κανονικής κατανομής, και είναι αντίστοιχα η **μέση τιμή** και **τυπική απόκλιση** της κανονικής τυχαίας μεταβλητής Χ.

Τυπική Κανονική Κατανομή

- Μια τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής με μέση μ=0 και τυπική απόκλιση σ=1 λέγεται **τυπική κανονική κατανομή** και συμβολίζεται με Z. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z συμβολίζεται με φ(z) και είναι:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{για} \; -\infty < z < \infty$$

η δε αθροιστική πιθανότητα της Z συμβολίζεται παρόμοια με κεφαλαίο Φ,

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{για} \; -\infty < z < \infty$$

Μετασχηματισμός σε τυπική κατανομή

- Εάν για μία κανονική μεταβλητή ***X~N(μ,σ)*** θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ***P(X≤x)***, με τυποποίηση της X μεταφερόμαστε στην τυπική κανονική μεταβλητή ***Z~N(0,1)*** και βρίσκουμε από τους στατιστικούς πίνακες την ισοδύναμη πιθανότητα ***P(Z≤z) = Φ(z)*** για ***z=(x-μ)/σ***,

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ασκήσεις

Κανονική Κατανομή

Άσκηση 4

- Η αντοχή συμπίεσης τσιμέντου (Χ) ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu=60$ και $\sigma^2=4^2$.
- Ποια η πιθανότητα, σε έναν έλεγχο 8 δοκιμών αντοχής συμπίεσης, όλες οι τιμές να βρεθούν στο διάστημα μεταξύ 46 και 70;

Λύση άσκησης 4 (1/3)

- Έχουμε τα δεδομένα:

  $X \sim N(\mu=60,\ \sigma^2=4^2)$

  n = 8 δοκιμές

- Αρχικά, αναζητούμε την πιθανότητα P(46<X<70). Ισχύει:

$$P(46<X<70)=F(70)-F(46)$$
$$=P(X\leq 70)-P(X\leq 46)$$
$$=\Phi\left(\frac{70-60}{4}\right)-\Phi\left(\frac{46-60}{4}\right)=\Phi(2,5)-\Phi(-3,5)$$

Λύση άσκησης 4 (2/3)

- Από τους πίνακες τυπικής κανονικής κατανομής έχουμε:

  $\Phi(2,5) = 0,9938$

  $\Phi(-3,5) = 0,0002$

- Με αντικατάσταση προκύπτει:

  $P(46<X<70) = 0,9936 = p$

Λύση άσκησης 4 (3/3)

- Για να απαντήσουμε στο ζητούμενο χρησιμοποιούμε διωνυμική κατανομή. Ισχύει:

  n = 8

  p = 0,9936

  Y = {0,1,2,3,...,8}

$$P(Y=8)=\binom{n}{8}p^{8}(1-p)^{n-8}=p^{8}$$

Άσκηση 5

- Η (Χ) ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu=10$ και $\sigma^2=2^2$.

  α) Ποια είναι η πιθανότητα το Χ να είναι μικρότερο του 13, το Χ να είναι μεγαλύτερο του 9 και το Χ να είναι μεταξύ του 6 και του 14;

  β) Ποιο είναι το x, αν ισχύει $P(X>x) = 0,95$

Λύση άσκησης 5 (1/3)

- Έχουμε τα δεδομένα:

  X~N(10, 2^2)

- Αρχικά, αναζητούμε την πιθανότητα P(X<13). Ισχύει:

$$P(X<13)=\Phi\left(\frac{13-10}{2}\right)=\Phi(1,5)=0,93$$

- Η πιθανότητα P(X>9) είναι:

$$P(X>9)=1-P(X<9)=1-\Phi\left(\frac{9-10}{2}\right)=1-\Phi(-0,5)\approx 0,69$$

Λύση άσκησης 5 (2/3)

- Η πιθανότητα P(6<X<14) είναι:

$$P\left(46<X<70\right)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{6-10}{2}\right)$$

Λύση άσκησης 5 (3/3)

- Εάν P(X>x) = 0,95 τότε

  P(X<x) = 0,05

  $$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=0,05$$

- Από πίνακες είναι:

  $$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=-1,64 \Rightarrow \frac{x-10}{2}=-1,64 \Rightarrow x=10-2\left(1,64\right)$$

Άσκηση 6

- Η διάρκεια λειτουργίας ενός εξαρτήματος κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 200 ώρες.
- Εάν ο καταναλωτής απαιτεί τουλάχιστον 90% των εξαρτημάτων να έχουν διάρκεια πάνω από 150 ώρες, ποια πρέπει να είναι η τυπική απόκλιση;

Λύση άσκησης 6 (1/2)

- Έχουμε τα δεδομένα:

  $X \sim N(200, \sigma^2)$

  $P(X>150)=0,90$

- Εάν $P(X>150)=0,90$ τότε:

$$P\left(X \leq 150\right)=0,10 \Rightarrow \Phi\left(\frac{150-200}{\sigma}\right)=0,10$$

Λύση άσκησης 6 (2/2)

- Από πίνακες είναι:

$$\left(\frac{150-200}{\sigma}\right)=-1,28 \Rightarrow \sigma$$

Άσκηση 7

- Η γέμιση σε κουτιά ανθρακούχου ποτού είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 450 ml και τυπική απόκλιση 5 ml.
- α) Ποιο ποσοστό από τα κουτιά περιέχει ποσό περισσότερο από 460 ml;
- β) Πώς πρέπει να ρυθμίσουμε τη μέση τιμή τιμή της γέμισης, ώστε η πιθανότητα η γέμιση να ξεπερνάει το 450 να ισούται με 0,99.

Λύση άσκησης 7 (1/2)

- Έχουμε τα δεδομένα:

  $X \sim N(450, 5^2)$

- Αρχικά, αναζητούμε την πιθανότητα $P(X>460)$. Ισχύει:

$$P(X>460)=1-P(X\leq 460)=1-\Phi\left(\frac{460-\mu}{\sigma}\right)$$

- Με αντικατάσταση και από πίνακες προκύπτει η τιμή του Φ και στη συνέχεια η ζητούμενη πιθανότητα.

Λύση άσκησης 7 (2/2)

- Έχουμε τα δεδομένα:

  $X \sim N(\mu, 5^2)$

  $P(X \geq 450) = 0{,}99$

- Εάν $P(X \geq 450) = 0{,}99$ τότε:

$$P\left(X \leq 450\right) = 0{,}01 \Rightarrow \Phi\left(\frac{450-\mu}{5}\right) = 0{,}01$$

- Από πίνακες προκύπτει η τιμή του Φ και στη συνέχεια η ζητούμενη μέση τιμή.

Άσκηση 8

- Ένα σύστημα αποτελείται από 100 εξαρτήματα.
- Η πιθανότητα να χαλάσει το κάθε εξάρτημα είναι 0,10.
- Να βρεθεί με κανονική προσέγγιση η πιθανότητα το λιγότερο 85% των εξαρτημάτων να μην αποτυγχάνουν κατά τη λειτουργία του συστήματος.

Λύση άσκησης 8 (1/2)

- ***Επίλυση με διωνυμική κατανομή***. Ισχύει:

  p=0,10, n=100.

- Εάν Χ τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των εξαρτημάτων που θα χαλάσουν, είναι: X={1,2,....,100}.

- Αναζητούμε την πιθανότητα P(X≤15). Ισχύει:

$$P\left(X\leq 15\right)=\sum_{x=0}^{15}\binom{n}{x}p^{x}\left(1-p\right)^{n-x}$$

Λύση άσκησης 8 (2/2)

- ***Επίλυση με προσέγγιση με κανονική κατανομή.***
Ισχύει: $\mu = E(X) = np = 100(0,1) = 10$

$Var(X) = np(1-p) = 10(0,90) = 9 = \sigma^2$

- Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή: $X \sim N(\mu=10, \sigma^2=9)$.
- Αναζητούμε την πιθανότητα:

$$P(X \leq 15) = \Phi\left(\frac{15-10}{3}\right) = \Phi(1,66)$$

- Από πίνακες προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Βιβλιογραφία

1. "Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς", Γεώργιος Χ. Ζιούτας, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/484966
2. "Εφαρμογές Πιθανοτήτων και Στατιστικής στη Μελέτη και Προγραμματισμό Τεχνικών Έργων", A. H.-.S Ang και W.H. Tang, μετάφραση Δ. Παναγιωτακόπουλος, εκδόσεις Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 2003. http://search.lib.auth.gr/Record/887881
3. Σημειώσεις για το Μέρος Α του μαθήματος, Γιώργος Ζιούτας. http://users.auth.gr/DKUGIU/Teach/ChemicalEngineer/zioutasbook.pdf.
4. Σημειώσεις για το Μέρος Β του μαθήματος, Δημήτρης Κουγιουμτζής, ανατύπωση ΑΠΘ, 2009. http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChemicalEngineer/index.html.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Μπατζιάκα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2015

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.