ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 3.2 : Απαρίθμηση – Συνδυαστική (ΙΙ).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Απαρίθμηση - Συνδυαστική

Μέρος ΙΙ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Συνδυασμοί, Μεταθέσεις, Διατάξεις και Απαρίθμηση.
   1. Συνδυαστική.
   2. Συνδυασμοί.
   3. Απαρίθμηση.
   4. Διατάξεις.

Συλλογές 1

- Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε ένα σύνολο με Ν στοιχεία. Δηλαδή όλα τα στοιχεία είναι διαφορετικά.
- Τι γίνεται όμως αν μερικά από αυτά είναι ίδια; Πχ αν έχουμε Ν κέρματα από τα οποία κάποια είναι 5λεπτα, κάποια 10λεπτα, κάποια 20λεπτα, κάποια 50λεπτα, κάποια 1Ευρώ και κάποια 2Ευρώ και θέλουμε να διαλέξουμε k από αυτά;

Συλλογές 2

- Τότε μπορούμε να έχουμε γενικά **m** διαφορετικά σύμβολα (πχ 6 διαφορετικά κέρματα) που το καθένα επαναλαμβάνεται μερικές φορές πχ $κ_1$, $κ_2$, $κ_3$,…,$κ_m$ φορές αντίστοιχα, έτσι ώστε $κ_1+κ_2+κ_3+…+κ_m =N$. πχ έχουμε 6 κέρματα των 5, 7 κέρματα των 10 λεπτών, 10 των 20, 5 των 50, 10 του 1 Ευρώ και 12 των 2. Έχουμε μια συλλογή 50 κερμάτων στην οποία υπάρχουν 6 κατηγορίες κερμάτων.

Συλλογές 3

- Ερώτημα: αν διαλέξουμε στην τύχη 6 κέρματα **τι αξία** θα έχει η συλλογή μας;
- Μπορούμε να διαλέξουμε 6 των 5 λεπτών ή 5 των 5 λεπτών και 1 των 10 ή 3 του 1 Ευρώ και 3 των 2 Ευρώ κοκ. <u>Γενικά φυσικά ο αριθμός των συλλογών διαφορετικής αξίας δεν είναι ίσος με τον αριθμό των συνδυασμών 50 ανά 6.</u>

Συνδυασμοί και Διατάξεις σε συλλογές

- Ας το εξετάσουμε θεωρητικά: στα παραπάνω αναφερθήκαμε σε ένα σύνολο με N στοιχεία και το σχηματισμό υποσυνόλων μεγέθους k. Σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων αντί να αναφερόμαστε σε N στοιχεία **αναφερόμαστε σε m κατηγορίες στοιχείων από τα οποία σχηματίζουμε συλλογές μεγέθους k.** Δηλαδή, έχουμε μία συλλογή που περιέχει έναν αριθμό από κάθε μια από τις m κατηγορίες και αναζητούμε υποσυλλογές με k στοιχεία.

Συλλογές 4

- Γενικά διακρίνουμε την περίπτωση **όπου έχουμε τουλάχιστον k ίδια στοιχεία από κάθε κατηγορία από τις m** οπότε πρακτικά μπορεί να διαλέξουμε τα k στοιχεία από μία ή περισσότερες κατηγορίες ή για κάποιες κατηγορίες έχουμε στη συλλογή μας λιγότερα από k στοιχεία.
- **Προσέξτε επίσης ότι το m δεν είναι αναγκαστικά μεγαλύτερο (ή ίσο) του k.**

Συλλογές 5

- Και πάλι μας ενδιαφέρει η σειρά (έχει δηλαδή σημασία ποιο διαλέγουμε πρώτο, ποιο δεύτερο, κοκ) οπότε αναφερόμαστε σε **επαναληπτικές διατάξεις** ή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά (δεν έχει δηλαδή σημασία ποιο διαλέγουμε πρώτο, ποιο δεύτερο, κοκ) οπότε αναφερόμαστε σε **επαναληπτικούς συνδυασμούς.**

Συλλογές 6

- Αν διαλέξουμε για παράδειγμα 4 νομίσματα για εμάς, δεν έχει σημασία αν διαλέξουμε πρώτα 5λεπτο, 10λεπτο, 20λεπτο, 50λεπτο, 1 Ευρώ ή 2 Ευρώ. Η επιλογή 5λ, 10λ, 1Ε, 2Ε είναι ίδια με την επιλογή 5λ, 1Ε, 2Ε, 10λ. Αν όμως έχει σημασία ποιο διαλέγουμε πρώτο, ποιο δεύτερο, ποιο τρίτο και ποιο τέταρτο (πχ δίνουμε ένα νόμισμα σε κάθε έναν από 4 φίλους μας) τότε οι δύο επιλογές είναι διαφορετικές.

Συλλογές-επαναληπτικές διατάξεις 1

- Στην απλή περίπτωση αν σε κάθε μία από **τις k θέσεις** μπορεί να τοποθετηθεί κάποιο από τα **m αντικείμενα** τότε οι διαφορετικές τοποθετήσεις είναι **m*m*…*m=**m^k **(γινόμενο k φορές του m).**
- Αν για παράδειγμα έχουμε m αριθμούς [πχ δέκα για το δεκαδικό σύστημα] και θέλουμε να σχηματίσουμε αριθμούς με k ψηφία [πχ 5ψήφιους] όλοι οι τρόποι να επιλέξουμε μια συλλογή μεγέθους k όταν <u>μας ενδιαφέρει η σειρά</u> είναι m^k**.**

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Συλλογές-επαναληπτικές διατάξεις 2

- Στο παράδειγμα με τα νομίσματα (όπου λ=λεπτά και Ευ= ευρώ) θα δίναμε 5λεπτά, 10λ, 20λ, 50λ, 1Ευ ή 2 Ευ στον πρώτο, 5λ, 10λ, 20λ, 50λ, 1Ευ ή 2Ευ στον δεύτερο, 5λ, 10λ, 20λ, 50λ, 1Ευ ή 2 Ευ στον τρίτο και 5λ, 10λ, 20λ, 50λ, 1Ευ ή 2Ευ στον τέταρτο. Υπάρχουν 6 περιπτώσεις για τον πρώτο, 6 για τον δεύτερο, 6 για τον τρίτο, 6 για τον τέταρτο και τελικά 6*6*6*6=1296 περιπτώσεις.

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων 1

- Ας γυρίσουμε στο παράδειγμα της Ιρλανδίας. Υπάρχουν 11 υποψήφιοι. Αν ασχοληθούμε μόνο με τους 7 από τους υποψηφίους [3 από το FF, 3 από το FG και ένας από το SF], αν μας ενδιαφέρει μόνο το κόμμα από το οποίο προέρχονται αναζητούμε όλες τις συλλογές μεγέθους 7 που μπορούν να σχηματιστούν στις 11 θέσεις (1,2,..,11) που περιέχουν τους 7 αυτούς.

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων 2

- Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι τοποθετούμε 7 **διαφορετικά** αντικείμενα σε 11 θέσεις (και έχει σημασία η σειρά). Τότε γνωρίζουμε ότι οι διατάξεις 11 ανά 7 σε ένα σύνολο είναι 11!/4! =11*10*9*8*7*6*5.

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων 3

- Αλλά αν για κάθε μία από αυτές ασχοληθούμε μόνο με τους 3 από το FF υπάρχουν 3!=1*2*3=6 μεταθέσεις τους που είναι ίδιες (αφού δεν έχει σημασία ποιος από τους τρεις είναι στην πρώτη, ποιος στη δεύτερη και ποιος στην τρίτη <u>θέση εσωτερικά στην τριάδα τους</u>).

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων παράδειγμα

- Αν δηλαδή δεν μας νοιάζει ποιος από τους 3 είναι στην 1η, ποιος στη 2η, ποιος στην 3η θέση αλλά μόνο ότι κάποιος από το κόμμα FF είναι στην 1η, κάποιος στη 2η και κάποιος στην 3η τότε έχουμε 6 ίδιες περιπτώσεις που αντιστοιχούν στην περίπτωση που είναι στην 1η γραμμή του πίνακα παρακάτω.

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων πίνακας

Πίνακας 1: Παράδειγμα διατάξεων όμοιων αντικειμένων.

1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η
FF	**FF**	**FF**	**FG**	**FG**	**FG**	**SF**			
FF	FF	FF	FG1	FG2	FG3	SF			
FF	FF	FF	FG1	FG3	FG2	SF			
FF	FF	FF	FG2	FG1	FG3	SF			
FF	FF	FF	FG2	FG3	FG1	SF			
FF	FF	FF	FG3	FG1	FG2	SF			
FF	FF	FF	FG3	FG2	FG1	SF			

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων παρατηρήσεις

- Έτσι υπάρχουν P(11,7)/3!*3! συλλογές γιατί ο συνολικός αριθμός των συλλογών που υπολογίσαμε στο παραπάνω βήμα (για το FF) πρέπει να διαιρεθεί με το 3! ώστε να μην μετρήσουμε περισσότερες φορές κάποια περίπτωση για το FG.

Διατάξεις ομοίων αντικειμένων τελικό αποτέλεσμα

Πίνακας 2: Τελικό αποτέλεσμα .

$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$	$7^η$	$8^η$	$9^η$	$10^η$
FF	FF	FF	FG	FG	FG	SF			

- Τελικά δηλαδή η περίπτωση αντιστοιχεί σε 36 (6*6*1) περιπτώσεις. Μάλιστα αυτό συμβαίνει γιατί το τρίτο κόμμα έχει μόνο έναν υποψήφιο άρα κάθε περίπτωση (για αυτό) είναι μοναδική.

Συνολικός Αριθμός Διατάξεων ομοίων αντικειμένων

- Έτσι τελικά για τα τρία κόμματα υπάρχουν **P(11,7)/(3!*3!*1!) συλλογές** αφού όπως είδαμε παραπάνω για το δεύτερο κόμμα θα υπάρχουν P(11,7)/(3!*3!) και για το τρίτο P(11,7)/(3!*3!*1!).

  Άρα αν θέλουμε να βρούμε τον συνολικό αριθμό τους διατάξεων ομοίων αντικειμένων διαιρούμε τον αριθμό των διατάξεων των διαφορετικών αντικειμένων ίσου πλήθους [7 στο παράδειγμα μας] για τις ίδιες θέσεις [11 στο παράδειγμα μας] με το γινόμενο του αριθμού των μεταθέσεων των επιμέρους ομάδων συμβόλων [3, 3 και 1 στο παράδειγμα].

Συνολικός Αριθμός Διατάξεων ομοίων αντικειμένων με άλλο τρόπο

- Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε φτάσει αν σκεφτόμασταν διαφορετικά.
- Οι τρεις θέσεις που θα καταλάβουν οι υποψήφιοι του FF από τις 11 προκύπτουν από τον αριθμό των συνδυασμών 11 ανά 3. Πράγματι, γιατί δεν έχει μόνο σημασία ποιες 3 θέσεις καταλαμβάνουν.
- **Για κάθε** τοποθέτηση τους μένουν 8 θέσεις κενές, 3 από τις οποίες καταλαμβάνουν υποψήφιοι του FG. Οι διαφορετικές τοποθετήσεις αυτές είναι ο αριθμός των συνδυασμών 8 ανά 3.
- **Για κάθε** μία από αυτές τις τοποθετήσεις ο υποψήφιος του SF καταλαμβάνει μία από τις 5 θέσεις που μένουν κενές, δηλαδή οι διαφορετικές τοποθετήσεις είναι ο αριθμός των συνδυασμών 5 ανά 1.

Έτσι τελικά έχουμε

- C(11,3)*C(8,3)*C(5,1)=

  11!*8!*5!

  8!*3!*5!*3!*4!*1!

  που είναι ίσο με P(11,7)/3!*3!*1! Διότι από τον ορισμό   P(11,7)=11!/4!

Συνδυασμοί σε συλλογές 1

- Ας υποθέσουμε στο παράδειγμα των ελληνικών εκλογών ότι είχαμε την υποχρέωση να τοποθετήσουμε ακριβώς 4 σταυρούς στους 19 υποψηφίους αλλά μπορούσαμε να σημειώσουμε περισσότερους σταυρούς από έναν σε κάποιον ή κάποιους υποψηφίους.

Παράδειγμα: θα μπορούσε κάποιος να βάλει 4 σταυρούς στον 2^{ο}, κάποιος άλλος 3 στον 2^{ο} και 1 στον 4^{ο}, κάποιος άλλος 1 στον 4^{ο}, 2 στον 5^{ο} και έναν στον 17^{ο} και συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Συνδυασμοί σε συλλογές 2

- Παρατηρείστε ότι οι υποψήφιοι είναι τοποθετημένοι αλφαβητικά. Δεν έχει δηλαδή σημασία **η σειρά τους**. Αναζητούμε τις **συλλογές των (n) 19 αντικειμένων ανά (k) 4**. Μία από αυτές είναι η {2,2,2,2}, μια άλλη η {2,2,2,4} μια άλλη η {4,5,5,17} κοκ.
- Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των συλλογών είναι ίσος με C(19+4-1,4) και γενικά ίσος με **C(n+k-1,k).**

Συνδυασμοί σε συλλογές 3

- Στο παράδειγμα αυτό ας σκεφτούμε ότι διαλέγουμε μια τετράδα από 19 διαφορετικά αντικείμενα (σύμβολα) αλλά πλέον έχει σημασία πόσα διαλέγουμε από κάθε σύμβολο. Μπορούμε να διαλέξουμε 0, 1, 2, 3 ή 4 από το πρώτο.
- Στη συνέχεια ανάλογα πόσα έχουμε διαλέξει μπορούμε να διαλέξουμε από το δεύτερο κοκ μέχρι να έχουμε διαλέξει 4. Αλλά μπορεί να ξεκινήσουμε να διαλέγουμε από οποιοδήποτε από τα 19.

Συνδυασμοί σε συλλογές 4

- Για την απόδειξη αυτή αρκεί να θεωρήσουμε n **(19)** κουτιά [ένα μεγάλο με n-1 διαχωριστικά] μέσα στα οποία τοποθετούμε k **(4)** ίδια αντικείμενα. Τότε στο μεγάλο έχουν τοποθετηθεί σε κάποιες θέσεις ανάμεσα στα διαχωριστικά (<u>που έστω συμβολίζουμε με Α</u>) k αντικείμενα (<u>που έστω συμβολίζουμε με Β</u>).
- Τότε ο αριθμός των συλλογών είναι ίσος με τον αριθμό των διαφορετικών τοποθετήσεων n-1 Α και k Β σε n+k-1 θέσεις. Άρα ο αριθμός των συνδυασμών n+k-1 ανά k ή ο αριθμός των συνδυασμών n+k-1 ανά n-1 που είναι ίσοι.

Συνδυασμοί σε συλλογές 5

- Για να γίνει κατανοητό ας επιστρέψουμε στα νομίσματα: έχουμε 6 κατηγορίες νομισμάτων (5λ, 10λ, 20λ, 50λ, 1Ευ, 2Ευ) και διαλέγουμε 4. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε μία κατηγορία έχουμε τουλάχιστον 4. Τότε έχουμε 6 αντικείμενα και διαλέγουμε 4 (που μπορεί να είναι ίδια).

Συνδυασμοί σε συλλογές 6

- Έχουμε 6 αντικείμενα (νομίσματα διαφορετικής αξίας). Διαλέγουμε 4 από αυτά. Για το καθένα μπορεί να διαλέξουμε 0, 1, 2, 3 ή 4. Επειδή ο συνολικός αριθμός πρέπει να είναι 4 από 6-1+4 θα διαλέξουμε 4. Τελικά έχουμε 9 ανά 4 περιπτώσεις, δηλαδή 126 περιπτώσεις.
- Πράγματι για να σχηματιστεί μια τετράδα 4 έχουμε τις εξής επιλογές: 4 από κάποιο, 3 από κάποιο και 1 από κάποιο από τα άλλα, 2 από κάποιο και 2 από κάποιο άλλο, 2 από κάποιο και 1 από 2 από τα άλλα, 1 από κάποια 4.

Συνδυασμοί σε συλλογές 7

Πίνακας 3: Συνδυασμοί.

	Αριθμός διαφορετικών	1	2	3	4
1η λύση	4 μονά	4	0	0	0
2η λύση	2 μονά και 1 διπλό	2	1	0	0
3η λύση	1 μονό και 1 τριπλό	1	0	1	0
4η λύση	2 διπλά	0	2	0	0
5η λύση	1 τετραπλό	0	0	0	1

Συνδυασμοί σε συλλογές 8

- Αλλά επειδή έχουμε 6 σύμβολα (νομίσματα) έχουμε 6 ανά 4 τρόπους για την πρώτη λύση [15], 6 ανά 2 επί 4 ανά 1 για την δεύτερη (διαλέγω πρώτα 2 και μετά 1 από τα άλλα 4) [60], 6 ανά 1 επί 5 ανά 1 για την τρίτη [30], 6 ανά 2 για την τέταρτη [15] και 6 ανά 1 για την πέμπτη [6]. Συνολικά κάνει 126 [δηλαδή 6-1+4 ανά 4].

Προσοχή

- Προσέξτε ότι η προϋπόθεση είναι να έχουμε αρκετά από κάθε σύμβολο (τουλάχιστον όσα θέλουμε να επιλέξουμε). Στο παράδειγμα μας έχουμε τουλάχιστον 4 από κάθε νόμισμα.
- Αν για κάποιο σύμβολο έχουμε λιγότερα (πχ είχαμε 3 νομίσματα του 1 Ευρώ και άρα δεν ήταν δυνατό να διαλέξουμε 4 του 1 Ευρώ) θα έπρεπε να σκεφτούμε διαφορετικά.

Τουλάχιστον – ακριβώς – το πολύ

- Αν στο παράδειγμα έπρεπε να υπάρχει
- **τουλάχιστον** ένα νόμισμα του 1 Ευρώ θα ασχολούμασταν με τα υπόλοιπα 3 νομίσματα (από τις 6 κατηγορίες). [6+3-1 ανά 3].
- **ακριβώς** ένα νόμισμα του 1 Ευρώ θα ασχολούμασταν με τα υπόλοιπα 3 (από τις 5 κατηγορίες). [5+3-1 ανά 3].
- **το πολύ** 1 νόμισμα του 1 Ευρώ θα διακρίναμε την περίπτωση να υπάρχει 1 ακριβώς στα 4 και την περίπτωση να υπάρχουν 4 από τα άλλα 5. [5+3-1 ανά 3]+[5+4-1 ανά 4].

Η Απαρίθμηση 1

- Καταγράφοντας όλους τους συνδυασμούς, τις διατάξεις ή τις μεταθέσεις ακολουθούμε τη λεξικογραφική διάταξη. Κατ' αυτήν τοποθετούνται κατά αύξουσα σειρά κατά θέση.
- Δηλαδή: βάζουμε τους συνδυασμούς (τις διατάξεις, τις μεταθέσεις) κατ' αύξουσα σειρά ως προς την πρώτη θέση, μετά κατ' αύξουσα σειρά ως προς τη δεύτερη και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Η Απαρίθμηση 2

- Όλες οι διατάξεις με 4 στοιχεία (δηλ. οι μεταθέσεις 4 στοιχείων)

Λεξικογραφική διάταξη

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Η Απαρίθμηση 3

- Όλοι οι συνδυασμοί με 4 στοιχεία από 6

Λεξικογραφική διάταξη

{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,6},

{1,2,4,5},{1,2,4,6},{1,2,5,6},

{1,3,4,5},{1,3,4,6},{1,3,5,6},

{1,4,5,6},{2,3,4,5},{2,3,4,6},

{2,3,5,6},{2,4,5,6},{3,4,5,6}

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1-3: Παράδειγμα.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, . Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Απαρίθμηση – Συνδυαστική (ΙΙ)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.