ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 5: Γραφήματα.

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γραφήματα

Γράφημα και Υπογράφημα

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γράφική Απεικόνιση

- Σε ένα **σύνολο V** ορίζουμε μία σχέση [μεταξύ των στοιχείων του] η οποία οδηγεί σε ένα **σύνολο Ε** υποσυνόλων με δύο στοιχεία.
- Αυτή είναι η απλούστερη μαθηματική δομή που μπορεί [πρακτικά] να αποτυπώσει οτιδήποτε.

Γράφημα

- Επειδή το V και το E χρησιμοποιούνται για να κάνουμε μια γραφική απεικόνιση το ζευγάρι (V,E) ονομάζεται **γράφημα**, τα στοιχεία του **συνόλου V** ονομάζονται **σημεία** και τα στοιχεία του E ονομάζονται **γραμμές**.
- Η διμελής σχέση μπορεί να ορίζει και διάταξη. Τότε το γράφημα είναι κατευθυνόμενο [δηλαδή έχει σημασία ποιο στοιχείο είναι πρώτο σε κάθε στοιχείο του E].

Τάξη και Μέγεθος

- Δύο σημεία ενώνονται με ένα **σύνδεσμο**
- Ο πληθικός αριθμός του V λέγεται **τάξη** και ο πληθικός αριθμός του Ε λέγεται **μέγεθος.** Δηλαδή: <u>τάξη είναι ο αριθμός των σημείων και μέγεθος ο αριθμός των γραμμών ενός γραφήματος.</u>
- Δύο σημεία είναι **γειτονικά** αν υπάρχει γραμμή που τα συνδέει. Ένα σημείο είναι **απομονωμένο** αν δεν συνδέεται με κανένα άλλο.

Βαθμός

- **Βαθμός** ενός σημείου είναι ο αριθμός των σημείων που συνδέονται με αυτό, ενώ αν είναι κατευθυνόμενο διακρίνουμε τον **έσω-βαθμό** (πόσες γραμμές δηλαδή έρχονται προς αυτό) και τον **έξω-βαθμό** (πόσες γραμμές φεύγουν από αυτό).

Πλήρες και Συμπληρωματικό

- **Πλήρες** γράφημα είναι ένα γράφημα όπου υπάρχουν όλες οι γραμμές μεταξύ των σημείων του. Δηλαδή, όλα συνδέονται με όλα.
- **Συμπληρωματικό** ενός γραφήματος είναι το γράφημα που έχει το ίδιο σύνολο σημείων και γραμμές τις γραμμές (από το πλήρες) που δεν υπάρχουν στο αρχικό γράφημα.

Υπογράφημα

- Υπογράφημα (V’, E’) ενός γραφήματος G=(V,E) είναι ένα γράφημα για το οποίο ισχύει ότι το σύνολο των σημείων του V’ είναι υποσύνολο του V, το σύνολο των γραμμών E’ είναι υποσύνολο του E αλλά οι γραμμές του E’ συνδέουν μόνο σημεία του V’.
- Αν στο E’ περιέχονται όλες οι γραμμές που συνδέουν σημεία του V’ τότε λέγεται **φέρον υπογράφημα** του G επί του V’.
- Αν το υπογράφημα περιέχει όλα τα σημεία του V αλλά δεν περιέχει όλες τις γραμμές του E λέγεται **επικαλύπτον υπογράφημα**.

Παραδείγματα

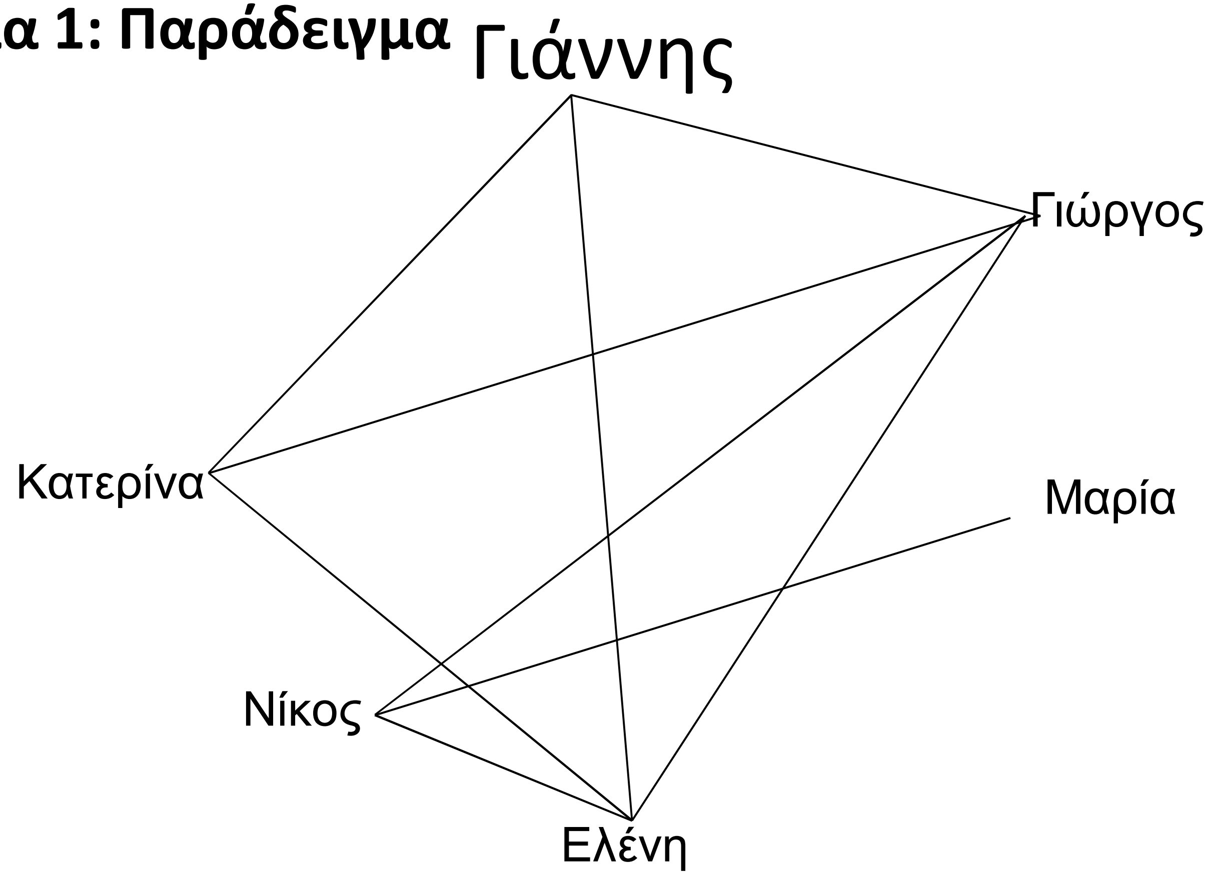
- Έστω ένα σύνολο V νέων. V={Γιάννης, Νίκος, Κατερίνα, Ελένη, Γιώργος, Μαρία}. Αν ορίσουμε τη σχέση [**γνωρίζονται**] τότε το σύνολο Ε θα αποτελείται από όλα τα υποσύνολα μεγέθους 2 με δυάδες στοιχείων του V.

Αναλυτικότερα

- Αν ο **Γιάννης** γνωρίζει την Κατερίνα, την Ελένη και το Γιώργο, ο **Νίκος** γνωρίζει την Ελένη, το Γιώργο και τη Μαρία, η **Κατερίνα** γνωρίζει το Γιάννη, το Γιώργο και τη Ελένη, η **Ελένη** γνωρίζει το Γιώργο, το Γιάννη, την Κατερίνα και το Νίκο, η **Μαρία** γνωρίζει το Νίκο και ο **Γιώργος** γνωρίζει το Γιάννη, την Κατερίνα, το Νίκο και την Ελένη τότε το γράφημα που αποτυπώνει τη σχέση γνωριμίας είναι το παρακάτω.

Γράφημα Παραδείγματος 1

Γράφημα 1: Παράδειγμα



Γράφημα-τάξη, μέγεθος

- Το V={Για, Κατ, Γιώ, Νικ, Ελε, Μαρ}.
- Το E={{Για,Κατ},{Για,Γιω},{Για,Ελε},{Κατ,Γιω}, {Κατ,Ελε},{Νικ,Γιω},{Νικ,Ελε},{Νικ,Μαρ}, {Γιω,Ελε}}.
- Η **τάξη** του γραφήματος είναι ίσος με 6 (όσα τα σημεία του V) και το **μέγεθος** του 9 (όσα τα στοιχεία του E).

Γράφημα-βαθμός

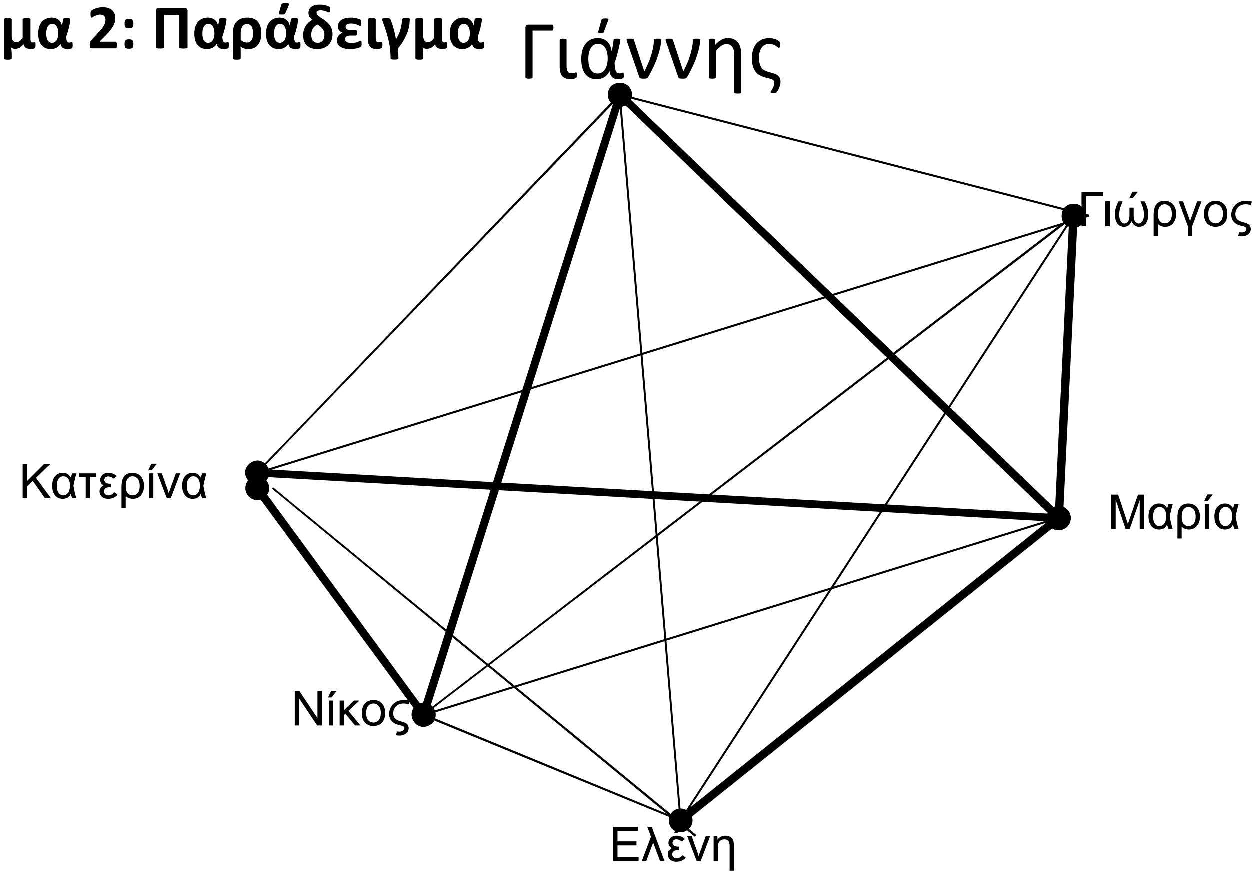
- Το σημείο (Γιάννης) έχει βαθμό 3, το σημείο (Κατερίνα) έχει βαθμό 3, το σημείο (Γιώργος) έχει βαθμό 4, το σημείο (Νίκος) έχει βαθμό 3, το σημείο (Ελένη) έχει βαθμό 4 και το σημείο (Μαρία) έχει βαθμό 1. [**Προσέξτε ότι 2*μέγεθος=άθροισμα βαθμών**].

Συμπληρωματικό-πλήρες

- Αν και οι έξη γνωρίζονταν μεταξύ τους τότε το γράφημα μας θα είχε 15 γραμμές **(ο βαθμός κάθε σημείου θα ήταν 5 και τότε 6*5=30, 30/2=15)** και το γράφημα θα ήταν πλήρες.
- Το συμπλήρωμα του γραφήματος μας είναι εκείνο που αποτυπώνει **ποιοι δεν γνωρίζονται μεταξύ τους.** Έτσι υπάρχουν οι γραμμές {Για,Νικ},{Για,Μαρ},{Κατ,Νικ},{Κατ,Μαρ}, {Ελε,Μαρ},{Γιω,Μαρ}.

Γράφημα Παραδείγματος 2

Γράφημα 2: Παράδειγμα

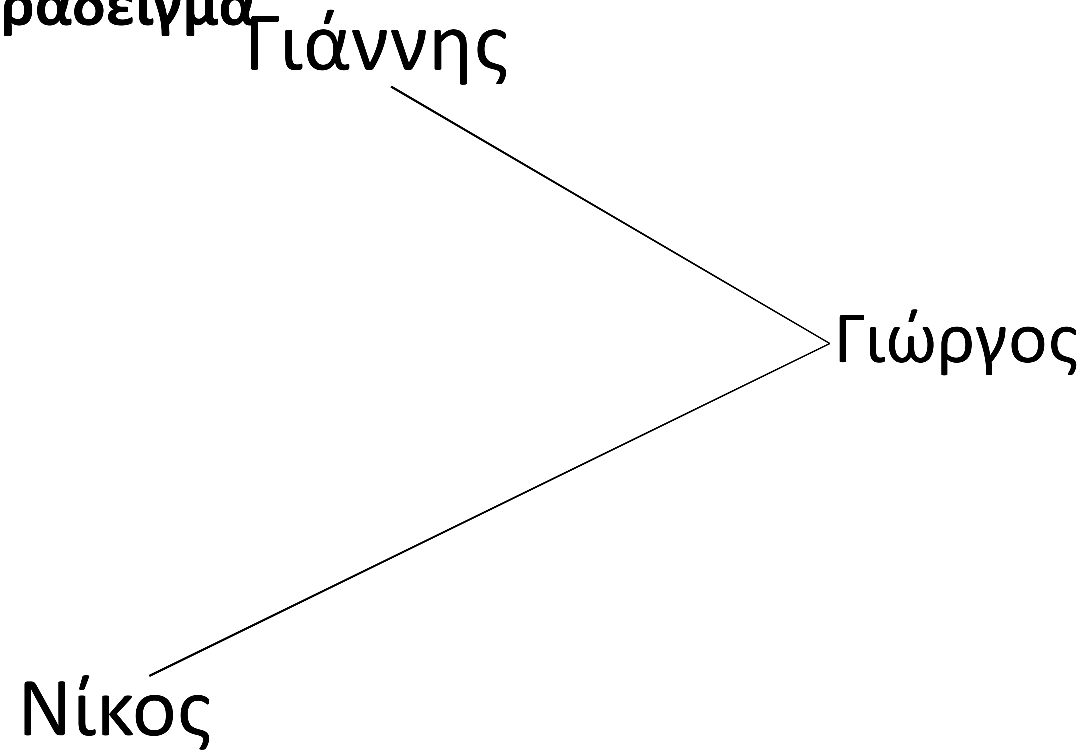


Φέρον Υπογράφημα

- Αν πάρουμε ένα υποσύνολο του V έστω τα κορίτσια {Κατ, Ελε, Μαρ} τότε το Ε΄ είναι υποσύνολο των γραμμών που συνδέουν κορίτσια μεταξύ τους. Το Εκορ είναι {{Κατ,Ελε}}. Ετσι αν το Ε΄=Εκορ το υπογράφημα είναι φέρον υπογράφημα.
- Αν πάρουμε τα αγόρια το Εαγο είναι {{Για,Γιω},{Νικ,Γιω}}. Αν το Ε’=Εαγο το υπογράφημα είναι φέρον.

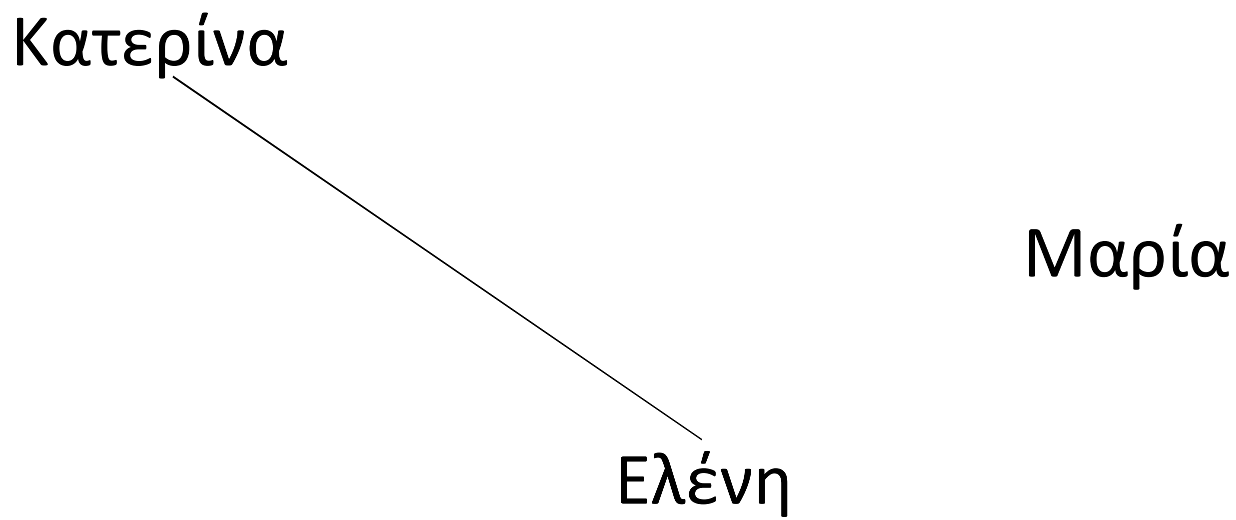
Παράδειγμα 1

Γράφημα 3: Παράδειγμα



Παράδειγμα 2

Γράφημα 4: Παράδειγμα

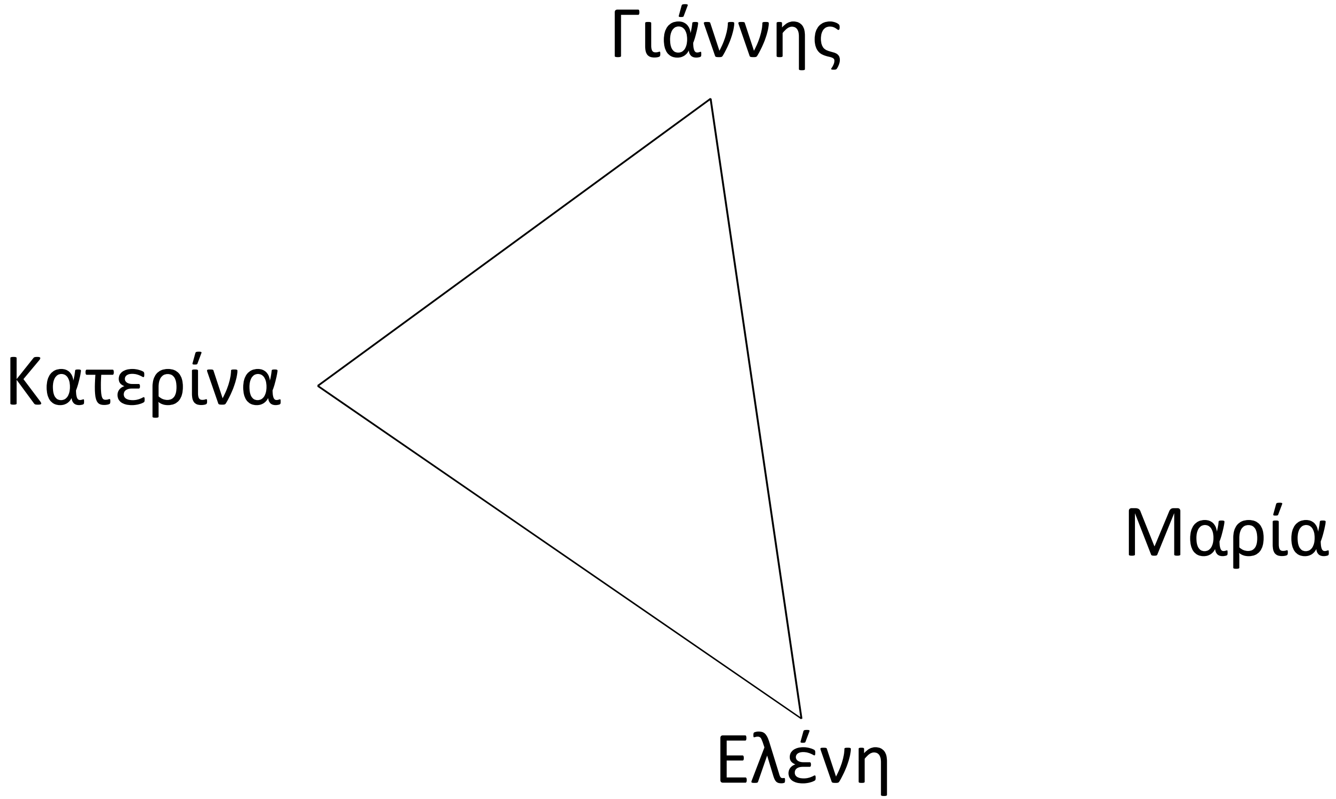


Επικαλύπτον Υπογράφημα

- Αν το V’ είναι το V αλλά πάρουμε μόνο τις γραμμές για αυτούς που ανήκουν σε ένα υποσύνολο [*πχ έχουν τελειώσει το ίδιο σχολείο*] έστω {Για, Κατ, Μαρ, Ελε} το E’={{Για,Κατ},{Για,Ελε},{Κατ,Ελε}} και το υπογράφημα (V,E’) είναι **επικαλύπτον υπογράφημα**.

Παράδειγμα 3

Γράφημα 5: Παράδειγμα

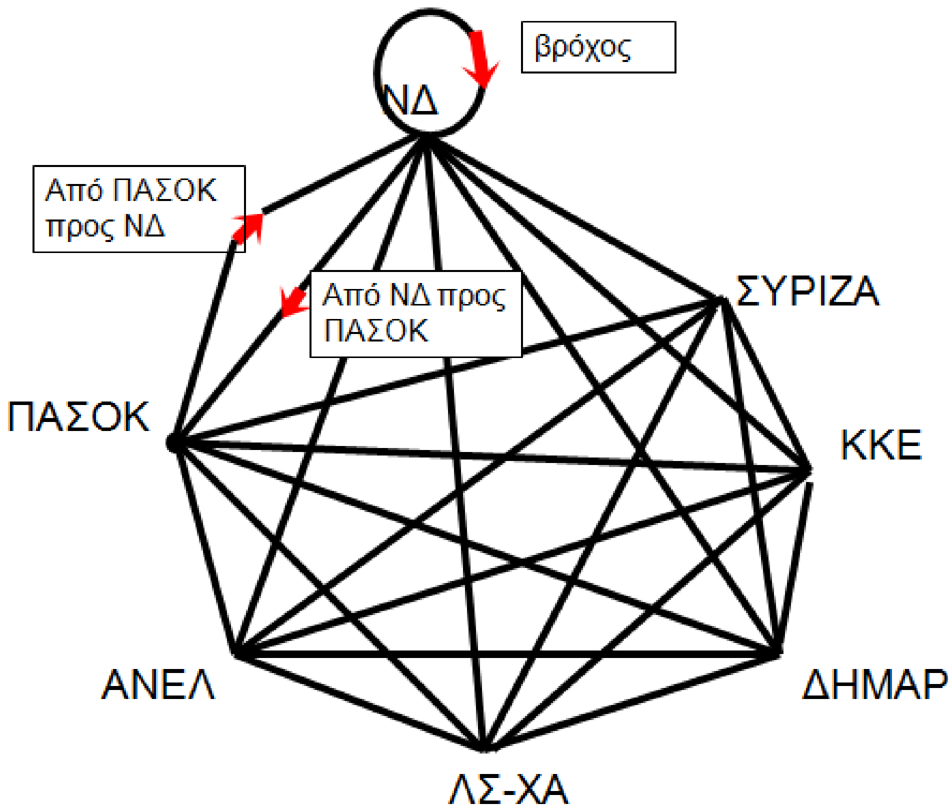


Κατευθυνόμενο γράφημα 1

- Το γράφημα G=(V,E) ονομάζεται κατευθυνόμενο όταν τα ζευγάρια που ορίζει η σχέση είναι διατεταγμένα. Δηλαδή έχει σημασία ποιο σημείο είναι πρώτο στη δυάδα. Συνήθως τότε δηλώνεται με ένα βέλος πάνω στη γραμμή σύνδεσης το οποίο δηλώνει την κατεύθυνση.

Εκλογές Μάιου 2012

Γράφημα 6: Παράδειγμα ροής από τις εκλογές Μάιου 2012 προς Ιούνιο 2012.



Κατευθυνόμενο γράφημα 2

- Το παραπάνω παριστά την ροή από τις εκλογές Μάιου 2012 προς Ιούνιο 2012. Σαν παράδειγμα, ο βρόχος παριστά την μετακίνηση από ΝΔ σε ΝΔ ενώ η κατεύθυνση ΠΑΣΟΚ προς ΝΔ την μετακίνηση από ΠΑΣΟΚ σε ΝΔ και η κατεύθυνση από ΝΔ σε ΠΑΣΟΚ την μετακίνηση από ΝΔ σε ΠΑΣΟΚ.

Βαρύτητα-ροή 1

- Σε κάθε γραμμή (είτε γραφήματος είτε κατευθυνόμενου γραφήματος) **μπορεί να οριστεί βαρύτητα ή ροή από ένα σημείο σε ένα άλλο (μέσω της γραμμής σύνδεσης**). Στο παράδειγμα παραπάνω σε κάθε γραμμή μπορούμε να σημειώσουμε το ποσοστό μετάβασης από κόμμα σε κόμμα.

Μετακινήσεις [Μάιος προς Ιούνιος]

Πίνακας 1: Μετακινήσεις ψηφοφόρων.

	ΝΔ	ΣΥΡΙΖΑ	ΠΑΣΟΚ	ΑΝΕΞ	ΛΣ-ΧΑ	ΔΗΜΑΡ	ΚΚΕ	Άλλο
ΝΔ	80,4%	3,9%	1,1%	1,7%	3,4%	0,6%		8,9%
ΣΥΡΙΖΑ	3,8%	82,3%		1,3%	0,6%	7,6%		4,4%
ΠΑΣΟΚ	7,1%	6,3%	65,2%	1,8%	0,9%	7,1%		11,6%
ΑΝΕΞ	22,8%	8,8%	1,8%	54,4%	1,8%	3,5%		7,0%
ΛΣ-ΧΑ	12,9%			9,7%	61,3%			16,1%
ΔΗΜΑΡ	4,1%	8,1%		1,4%	1,4%	71,6%		13,5%
ΚΚΕ	3,1%	6,3%					87,5%	3,1%
Άλλο		12,5%			12,5%	25,0%		50,0%
Δράση	35,7%	7,1%				7,1%		50,0%
ΑΝΤΑΡΣΥΑ		71,4%				14,3%		14,3%
Δημιουργία ξανά	7,7%							92,3%
Οικολόγοι	20,0%	60,0%					20,0%	0,0%
Άκυρο	8,0%	4,0%	4,0%		4,0%			80,0%

Βαρύτητα-ροή 2

- Η ροή αποτυπώνεται για παράδειγμα σε ένα δίκτυο δρόμων, σε ένα πανεπιστημιακό τμήμα, σε οποιοδήποτε θεσμό.

Μονοπάτια-Κύκλοι-Αποστάσεις

- Περίπατος: μια ακολουθία από γειτονικές γραμμές (αν αρχή και τέλος ταυτίζονται: κλειστός περίπατος).
- Διαδρομή: αν κάθε γραμμή εμφανίζεται μόνο μία φορά (αν αρχή και τέλος ταυτίζονται: κύκλωμα).
- **Μονοπάτι**: μια διαδρομή που κάθε σημείο εμφανίζεται μόνο μία φορά (αν αρχή και τέλος ταυτίζονται: **κύκλος**).

Συνδετικότητα-Συνεκτικότητα

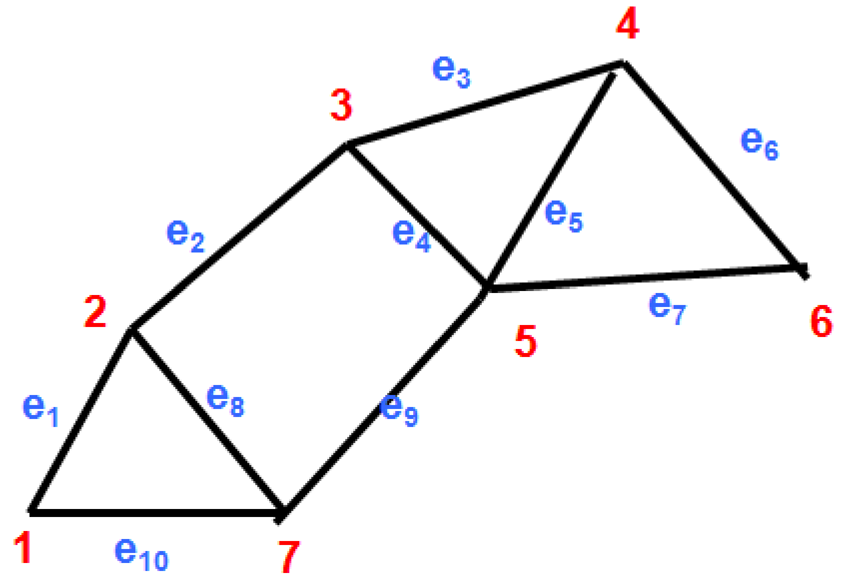
- **Συνεκτικό γράφημα**: αν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ οποιοδήποτε δύο σημείων του (δηλαδή από κάθε σημείο μπορούμε να μεταβούμε σε κάθε άλλο σημείο).
- **Ισχυρά συνεκτικό** (για κατευθυνόμενο γράφημα): αν μεταξύ οποιοδήποτε δύο σημείων του α και β υπάρχει μονοπάτι από το α στο β και από το β στο α.

Μήκος-αποστάσεις

- Μήκος: ο αριθμός των γραμμών σε ένα περίπατο, διαδρομή ή μονοπάτι.
- Απόσταση δύο σημείων είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού.
- Διάμετρος (γραφήματος) η μεγαλύτερη απόσταση σε αυτό.
- Εκκεντρικότητα (σημείου) η μεγαλύτερη απόσταση από τα άλλα σημεία.
- Κέντρο (γραφήματος) τα σημεία με τη μικρότερη εκκεντρικότητα.

Μήκος- αποστάσεις (γράφημα)

Γράφημα 7: Παράδειγμα μήκους και απόστασης.



[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.7 (σελ 178)]

Παράδειγμα

Πίνακας 2: Παράδειγμα.

	1	2	3	4	5	6	7	E
1	0	1	2	3	2	3	1	3
2	1	0	1	2	2	3	1	3
3	2	1	0	1	1	2	2	2
4	3	2	1	0	1	1	2	3
5	2	2	1	1	0	1	1	2
6	3	3	2	1	1	0	2	3

Μονοπάτια 1

- Σε ένα γράφημα (**βεβαρημένο**: δηλαδή έχει οριστεί ένα κόστος ή μια απόσταση για κάθε γραμμή του) αναζητούμε συνήθως τη **συντομότερη διαδρομή (ή τη διαδρομή ελάχιστου κόστους)** μεταξύ δύο σημείων του.
- Το παραπάνω προκύπτει σε πολλές καταστάσεις. Η απλούστερη εφαρμογή είναι στους πλοηγούς (navigators) που έχουν πλέον ενσωματωθεί σε κινητά και άλλα εργαλεία.

Μονοπάτια 2

- Υπάρχουν πολλές αντίστοιχες εφαρμογές. Πολλά παιχνίδια (πχ λαβύρινθοι) σας καλούν να βρείτε τη συντομότερη διαδρομή από ένα σημείο (είσοδο) σε ένα άλλο (έξοδο). Η ορολογία που χρησιμοποιούμε πολλές φορές προσομοιάζει με κίνηση (μονοπάτι, περίπατος, αρχή, τέλος).

Το συντομότερο μονοπάτι 1

- Μεταξύ δύο σημείων Α και Β σε ένα γράφημα αναζητούμε τη διαδρομή (δηλαδή την ακολουθία γραμμών) στην οποία αντιστοιχεί το ελάχιστο συνολικό κόστος.
- Προσοχή! Σε κάθε γραμμή αντιστοιχεί κάποιο ΚΟΣΤΟΣ. Πρέπει να έχουμε τοποθετήσει το πρόβλημα σωστά.

Ο αλγόριθμος του Dijkstra

- Βασίζεται σε διαδοχικά βήματα όπου στο καθένα μετακινούμε ένα σημείο στην προσωρινή λύση υπολογίζοντας το κόστος να φτάσουμε μέχρι αυτό από την αμέσως προηγούμενη προσωρινή λύση ή από την προηγούμενη της προηγούμενης.
- Σταματάμε όταν όλα τα σημεία έχουν μπει στη λύση.

Διαδρομή

Γράφημα 8: Παράδειγμα μήκους και απόστασης.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

Το συντομότερο μονοπάτι 2

- Ξεκινάμε από το σημείο Α [το οποίο μας έχει δοθεί] και υπολογίζουμε το κόστος μετακίνησης στα γειτονικά του. Στο παράδειγμα μας το σημείο Α είναι η Θεσσαλονίκη. Γειτονικά είναι η Αθήνα (κόστος 5), ο Βόλος (3), η Σκιάθος (7), η Σαντορίνη (20). Το κοντινότερο είναι ο Βόλος.

Προσωρινή λύση-Επανάληψη 1

- Έτσι στην προσωρινή λύση μας θα έχουμε

P={ Θεσσαλονίκη, **Βόλος**}

T={ Αθήνα, Πειραιάς, Σκιάθος, Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη - Βόλος

Γράφημα 9: Θεσσαλονίκη – Βόλος.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

Συνέχεια (επανάληψη 2.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αρχή με βάση την αμέσως προηγούμενη μετακίνηση [Θεσσαλονίκη] και από το σημείο που μόλις βάλαμε στη λύση [Βόλος] σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα.
- Αθήνα: {από Θ=5, από Β=3 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+3 (από Β σε Α)=6}. Έτσι επιλέγουμε το min (5).

Συνέχεια (επανάληψη 2.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Α =min{5, 3+3}= 5 [Θ-Α]

Θ-Π =min{∞, 3+ ∞}= ∞ [σημειώνουμε **άπειρο** στις συνδέσεις που **δεν υπάρχουν**]

Θ-Σκ =min{7, 3+3}= 6 [Θ-Β-Σκ]

Θ-Μ =min{∞, 3+ ∞}= ∞

Θ-Η =min{∞, 3+ ∞}= ∞

Θ-Σα =min{20, 3+ ∞}= 20 [Θ-Σα].

Συνέχεια…. (επανάληψη 2.3)

- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα. Έτσι η **Αθήνα** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα}

T={Πειραιάς, Σκιάθος, Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη - Αθήνα

Γράφημα 10: Θεσσαλονίκη – Αθήνα.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

(επανάληψη 3.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αμέσως προηγούμενη {Θεσσαλονίκη, Βόλος} και από το αμέσως προηγούμενο {Αθήνα} σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα
- Πειραιάς: {από Θ,Β= ∞, από Α=5 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+1 (από Α σε Π)=6}. Έτσι επιλέγουμε το min (6).

(επανάληψη 3.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Π =min{∞ (Θ-Β-Π), 5+ 1}= 6 [Θ-Α-Π]

Θ-Σκ =min{6 (Θ-Β-Σκ), 5+ ∞}= 6 [Θ-Β-Σκ]

Θ-Μ =min{∞ , 5+ ∞}= ∞

Θ-Η =min{∞, 5+ 9}= 14 [Θ-Α-Η],

Θ-Σα =min{20, 5+ ∞}=20 [Θ-Σα].

Από προηγούμενο βήμα 1

Από προηγούμενο βήμα 2

(επανάληψη 3.3)

- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα-Πειραιάς [ή στην Θεσσαλονίκη-Σκιάθος]. Μεταξύ των δύο επιλέγουμε **αυθαίρετα** τη δεύτερη και έτσι η **Σκιάθος** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος}.

T={ Πειραιάς, Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη – Βόλος - Σκίαθος

Γράφημα 11: Θεσσαλονίκη – Βόλος – Σκιάθος.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

(επανάληψη 4.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αμέσως προηγούμενη {Θεσσαλονίκη, Αθήνα} και από το αμέσως προηγούμενο {Σκιάθος} σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα
- σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα.
- Πειραιάς: {από Θ=6 (Θ-Α-Π), από Σκ=6 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+ ∞ (από Α σε Σκ)= ∞}. Έτσι επιλέγουμε το min (6) .

(επανάληψη 4.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Π =min{6, 6+ ∞}= 6 [Θ-Α-Π],

Θ-Μ =min{∞, 6+5}= 11 [Θ-Β-Σκ-Μ],

Θ-Η =min{14, 6+ ∞}= 14 [Θ-Α-Η],

Θ-Σα =min{20, 6+ ∞}=20 [Θ-Σα].

(επανάληψη 4.3)

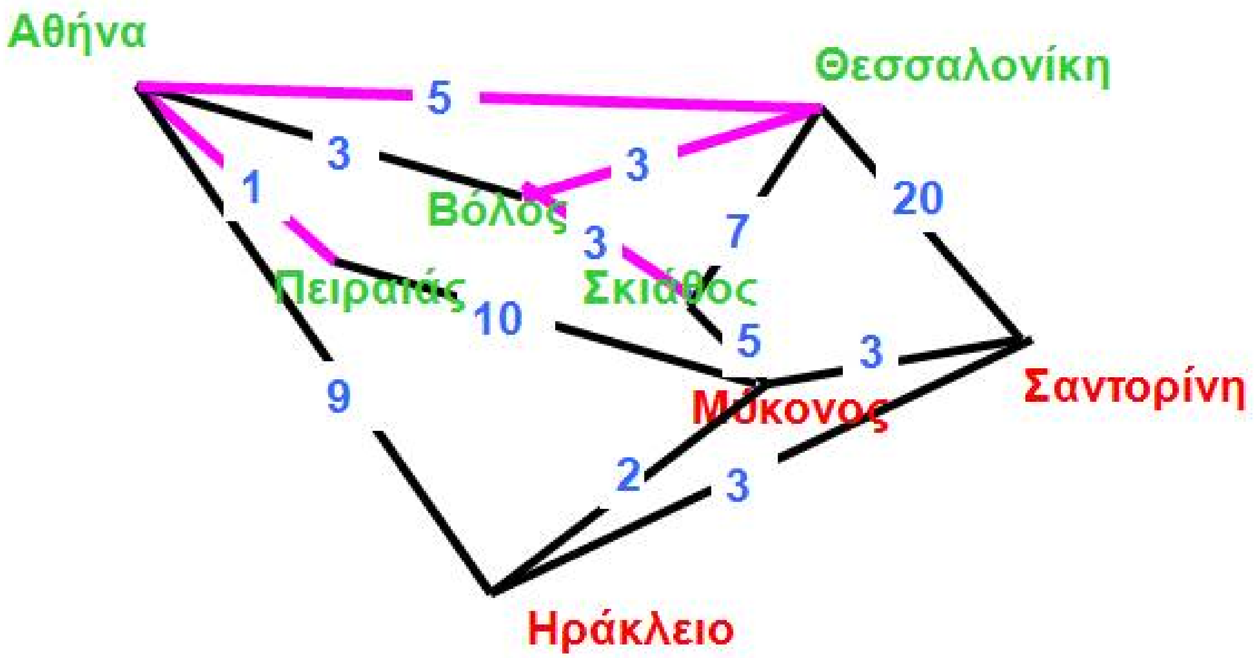
- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα-Πειραιάς. Έτσι ο **Πειραιάς** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς}.

T={Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς

Γράφημα 12: Θεσσαλονίκη – Βόλος – Σκίαθος – Αθήνα – Πειραιάς.



[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

(επανάληψη 5.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αμέσως προηγούμενη {Θεσσαλονίκη, Σκιάθος} και από το αμέσως προηγούμενο {Πειραιάς} σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα.

Μύκονος: {από Θ=11 (Θ-Β-Σκ-Μ), από Π=6 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+10 (από Π σε Μ)=16}. Έτσι επιλέγουμε το min (11).

(επανάληψη 5.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Μ =min{11, 6+10}= 11 [Θ-Β-Σκ-Μ],

Θ-Η =min{14, 6+ ∞}= 14 [Θ-Α-Η],

Θ-Σα =min{20, 6+ ∞}=20 [Θ-Σα].

(επανάληψη 5.3)

- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα-Σκιάθος-Μύκονος. Έτσι η **Μύκονος** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος}.

T={Ηράκλειο, Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος

Γράφημα 13: Θεσσαλονίκη – Βόλος – Σκίαθος – Αθήνα – Πειραιάς –Μύκονος.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

(επανάληψη 6.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αμέσως προηγούμενη {Θεσσαλονίκη, Πειραιάς} και από το αμέσως προηγούμενο {Μύκονος} σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα:

Ηράκλειο: {από Θ=14 (Θ-Α-Η), από Μ=11 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+2 (από Μ σε Η)=13}. Έτσι επιλέγουμε το min (13).

(επανάληψη 6.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Η =min{14, 11+2}= 13 [Θ-Β-Σκ-Μ-Η],

Θ-Σα =min{20, 11+3}=14 [Θ-Β-Σκ-Μ-Σα].

(επανάληψη 6.3)

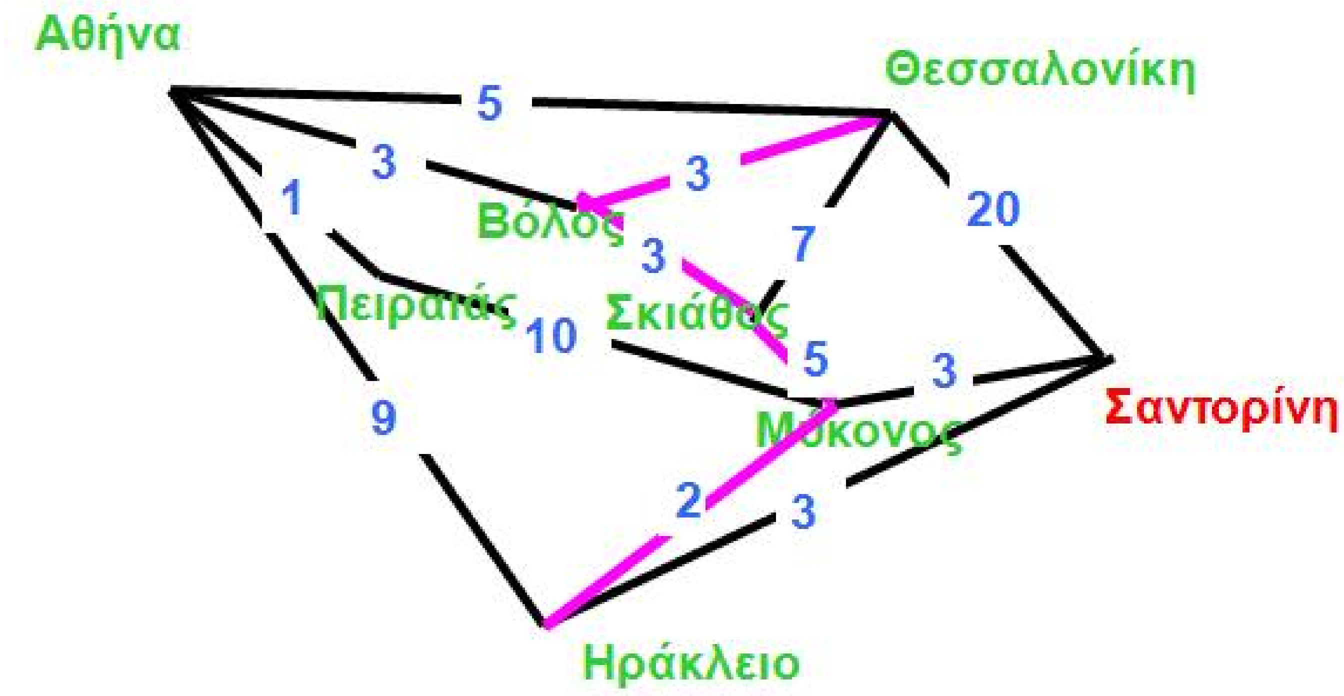
- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Βόλος-Σκιάθος-Μύκονος-Ηράκλειο. Έτσι το **Ηράκλειο** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος, Ηράκλειο}.

T={Σαντορίνη}.

Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος, Ηράκλειο

Γράφημα 14: Θεσσαλονίκη - Βόλος - Σκίαθος - Αθήνα - Πειραιάς -Μύκονος – Ηράκλειο.



[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

(επανάληψη 7.1)

- Υπολογίζουμε πόσο κοστίζει να μετακινηθούμε από την αμέσως προηγούμενη {Θεσσαλονίκη, Μύκονος} και από το αμέσως προηγούμενο {Ηράκλειο} σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα.

Σαντορίνη: {από Θ=14 (Θ-Β-Σκ-Μ-Σα), από Η=13 (για να έχουμε φτάσει εδώ)+3 (από Η σε Σα)=16}. Έτσι επιλέγουμε το min (14).

(επανάληψη 7.2)

- Εργαζόμενοι έτσι βρίσκουμε:

Θ-Σα =min{14, 13+3}=14 [Θ-Β-Σκ-Μ-Σα].

(επανάληψη 7.3)

- Το ελάχιστο (κόστος) αντιστοιχεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Βόλος-Σκιάθος-Μύκονος-Σαντορίνη. Έτσι η **Σαντορίνη** μπαίνει στην προσωρινή λύση και έχουμε:

P={ Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη}

T={}

- **Σταματάμε γιατί όλα τα σημεία έχουν μπει στο P.**

Θεσσαλονίκη, Βόλος, Αθήνα, Σκιάθος, Πειραιάς, Μύκονος, Ηράκλειο, Σαντορίνη

Γράφημα 15: Θεσσαλονίκη - Βόλος - Σκίαθος - Αθήνα - Πειραιάς -Μύκονος - Ηράκλειο – Σαντορίνη.

[Στο βιβλίο:Σχήμα 4.11 (σελ 185)]

Συντομότερο μονοπάτι

- Για να βρούμε το μονοπάτι γυρνάμε προς τα πίσω. Στην 5η επανάληψη είχαμε φτάσει στη Μύκονο. Αλλά στη Μύκονο είχαμε φτάσει από Σκιάθο. Στη Σκιάθο είχαμε φτάσει στη 3η επανάληψη από Βόλο. Στο Βόλο είχαμε φτάσει στην 1η επανάληψη από Θεσσαλονίκη.

Χρωματισμοί 1

- Μια ευρεία κατηγορία προβλημάτων αναφέρεται στην διαμέριση ενός συνόλου σε υποσύνολα που η ένωση τους δίνει το σύνολο ενώ η τομή τους ανά δύο είναι το κενό σύνολο. Είδαμε ότι με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε μια διαμέριση του δειγματοχώρου ώστε να έχουμε γεγονότα που καλύπτουν το αρχικό μας σύνολο.

Χρωματισμοί 2

- Η εικασία των 4 χρωμάτων (δηλαδή ότι αρκούν 4 χρώματα για να χρωματιστεί ένας χάρτης ώστε να έχει χρησιμοποιηθεί διαφορετικό χρώμα για γειτονικές ενότητες) διατυπώθηκε το 1856 και αποδείχτηκε το 1976 μετά από πολλές προσπάθειες. Μέχρι τότε είχε αποδειχτεί το 1890 ότι αρκούν 5 χρώματα.

Χρωματισμοί 3

- Το πρόβλημα αυτό (της διαμέρισης ενός συνόλου) είναι πάρα πολύ ευρύ. Η διατύπωση του για ένα γράφημα είναι:

  Αναζητούμε το μικρότερο αριθμό υποσυνόλων ξένων μεταξύ τους ανά δύο που η ένωση τους καλύπτει το σύνολο ώστε να μην υπάρχει σύνδεση στοιχείων εκτός του υποσυνόλου που ανήκουν.

Ένας αλγόριθμος λύσης

- Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό δημιουργούμε όλες τις δυνατές διαμερίσεις του συνόλου των σημείων του γραφήματος βασισμένοι στις συνδέσεις που υπάρχουν. Από αυτές επιλέγουμε εκείνη που έχει τα λιγότερα σύνολα.
- Ας δούμε την εφαρμογή με ένα παράδειγμα.

Αναπαράσταση του γραφήματος με πίνακα

- Ο πρωθυπουργός θέλει να τοποθετήσει 9 στελέχη σε υπουργεία αλλά δεν θέλει να τοποθετηθούν στο ίδιο υπουργείο στελέχη που έχουν κακές σχέσεις μεταξύ τους. Σε πόσα υπουργεία το λιγότερο θα τους τοποθετήσει;
- Αποτυπώνει με ένα **γράφημα** τις σχέσεις των στελεχών <u>συνδέοντας μεταξύ τους όσους έχουν κακή σχέση</u> και φτιάχνει τον παρακάτω πίνακα <u>(1 όταν συνδέονται, κενό αλλιώς)</u>.

Πίνακας του γραφήματος

Πίνακας 3: Γράφημα σε πίνακα.

	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8	Σ9
Σ1		1	1			1	1		
Σ2	1		1						
Σ3	1	1					1	1	1
Σ4					1			1	1
Σ5				1		1	1		
Σ6	1				1				
Σ7	1		1		1				1
Σ8			1	1					
Σ9			1	1			1		

Αλγόριθμος χρωματισμού 1

- Ξεκινώντας από τον Σ1 που είναι στο σύνολο Α, χωρίζει τους υπόλοιπους 8 σε δύο σύνολα. Στο πρώτο σύνολο Α* τοποθετούμε αυτά που είναι συνδεδεμένα {Σ2, Σ3, Σ6, Σ7} με το Σ1 και στο δεύτερο Α' τα υπόλοιπα {Σ4, Σ5, Σ8, Σ9}.
- Παίρνουμε το πρώτο στοιχείο του Α' και το τοποθετούμε στο σύνολο Α και τα συνδεδεμένα με αυτό στο σύνολο Α*.

Αλγόριθμος χρωματισμού 2

- Έτσι προκύπτουν τα σύνολα Α={Σ1, Σ4}, Α*={Σ2, Σ3, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9}, Α’={ }. Έτσι το σύνολο {Σ1, Σ4} είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο (**δηλαδή ένα σύνολο που τα στοιχεία του δεν συνδέονται μεταξύ τους**).
- Ξεκινώντας πάλι από το Α={Σ1} επιλέγουμε το επόμενο στοιχείο του Α’ (δηλαδή το Σ5) και το τοποθετούμε στο Α. Το Σ4 τοποθετείται στο Α* και τα άλλα δύο παραμένουν στο Α’. Παίρνουμε το Σ8 στο Α. Το Σ9 παραμένει στο Α’. Το τοποθετούμε στο Α και το Α’={ }. Έτσι προκύπτει το Α={Σ1, Σ5, Σ8, Σ9}.

Αλγόριθμος χρωματισμού 3

Ξεκινώντας από το Α={Σ1} επιλέγουμε το επόμενο του Α’ (δηλαδή το Σ8). Είναι φανερό ότι πάλι θα προκύψει το {Σ1, Σ5, Σ8, Σ9} όπως και αν ξεκινήσουμε από το Σ9.

Στη συνέχεια θέτουμε Α={Σ2} και σχηματίζουμε τα Α*={Σ1, Σ3}, Α’={Σ4, Σ5, Σ6, Σ7, Σ8, Σ9}.

Αλγόριθμος χρωματισμού 4

- Α={Σ2, Σ4}, Α*={Σ1, Σ3, Σ5, Σ8, Σ9}, Α’={Σ6, Σ7} και τελικά Α={Σ2, Σ4, Σ6, Σ7}
- Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε τα ανεξάρτητα σύνολα:
- Α1={Σ1, Σ4}, Α2={Σ1, Σ5, Σ8, Σ9}, Α3={Σ2, Σ4, Σ6, Σ7}, Α4={Σ2, Σ5, Σ8, Σ9}, Α5={Σ2, Σ6, Σ7, Σ8}, Α6={Σ3, Σ4, Σ6}, Α7={Σ3, Σ5}, Α8={Σ6, Σ8, Σ9}.

Β φάση

- Οποιαδήποτε ένωση ανεξάρτητων συνόλων που καλύπτει το αρχικό σύνολο δίνει έναν πιθανό χρωματισμό.
- Πχ {Α2 ∞ Α3 ∞ Α6} μας δίνει το αρχικό σύνολο. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 3 χρώματα. Προσέξτε ότι τα κοινά στοιχεία Σ4, Σ6 των Α3 και Α6 μπορεί να χρωματιστούν με όποιο από τα δύο θέλουμε.

Λύση

Πίνακας 4: Αναλυτικά ανά χρώμα

	Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6	Σ7	Σ8	Σ9
Σ1		1	1			1	1		
Σ2	1		1						
Σ3	1	1					1	1	1
Σ4					1			1	1
Σ5				1		1	1		
Σ6	1				1				
Σ7	1		1		1				1
Σ8			1	1					
Σ9			1	1			1		

Το ελάχιστο δέντρο

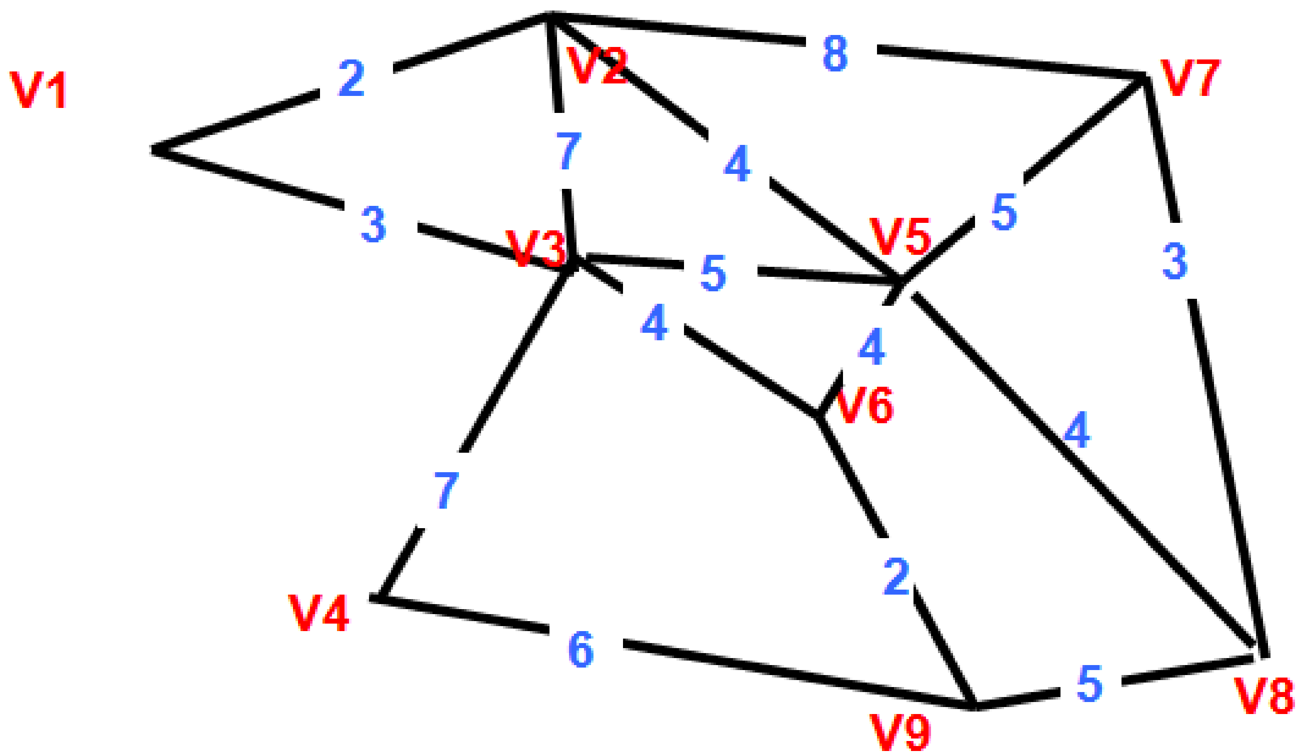
- Δέντρο: ένα **συνεκτικό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα που δεν περιέχει κύκλο.**
- Κλαδιά και φύλλα (αν καταλήγουμε με μια σύνδεση σε κάποιο αυτό ονομάζεται φύλλο [έχει βαθμό 1], αλλιώς ονομάζεται εσωτερικός κόμβος).

Το ελάχιστο δέντρο (σε ένα γράφημα)

- Πρέπει: **να υπάρχει μονοπάτι από κάθε σημείο σε κάθε άλλο σημείο, οι αποστάσεις συνολικά να είναι ελάχιστες**.
- Φυσικά, αν **δεν έχει** οριστεί απόσταση (ή τότε σε κάθε γραμμή η απόσταση είναι η ίδια) το ελάχιστο δέντρο είναι **αυτό που έχει τις λιγότερες γραμμές**. Σε αυτή την περίπτωση ενδέχεται να υπάρχουν εναλλακτικά ελάχιστα δέντρα.

Σχήμα

Γράφημα 15: Το ελάχιστο Δέντρο.



[Στο βιβλίο: Σχήμα 5.4 (σελ 215)]

Γραμμές και βάρη 1

Πίνακας 5: Γραμμές και βάρη.

V1-V3	E1	3	V3-V6	E8	4
V1-V2	E2	2	V4-V9	E9	6
V2-V3	E3	7	V5-V8	E10	4
V2-V7	E4	8	V6-V9	E11	2
V2-V5	E5	4	V5-V6	E12	4
V3-V5	E6	5	V8-V9	E13	5
V3-V4	E7	7	V7-V8	E14	3

Αλγόριθμος

- Επειδή έχουμε 9 σημεία πρέπει (κατ' ελάχιστον να έχουμε 8 γραμμές στο ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο).
- Ξεκινάμε από αυτά που έχουν το μικρότερο βάρος βάζοντας στο δέντρο ένα-ένα (μέχρι να μπουν 8) παραλείποντας αυτά που δημιουργούν κύκλους.

Βάζουμε τις γραμμές στη σειρά

- Κατά αύξουσα σειρά (με βάση το βάρος)
- Κατά σειρά στο δέντρο φροντίζοντας η γραμμή που βάζουμε να μη δημιουργεί κύκλο.
- Αν έχουν συνδεθεί όλα τα σημεία τελειώσαμε.

Γραμμές και βάρη 2

Πίνακας 6: Γραμμές και βάρη.

V1-V2	E2	2	V5-V6	E12	4
V6-V9	E11	2	V3-V5	E6	5
V1-V3	E1	3	V8-V9	E13	5
V7-V8	E14	3	V4-V9	E9	6
V2-V5	E5	4	V2-V3	E3	7
V3-V6	E8	4	V3-V4	E7	7
V5-V8	E10	4	V2-V7	E4	8

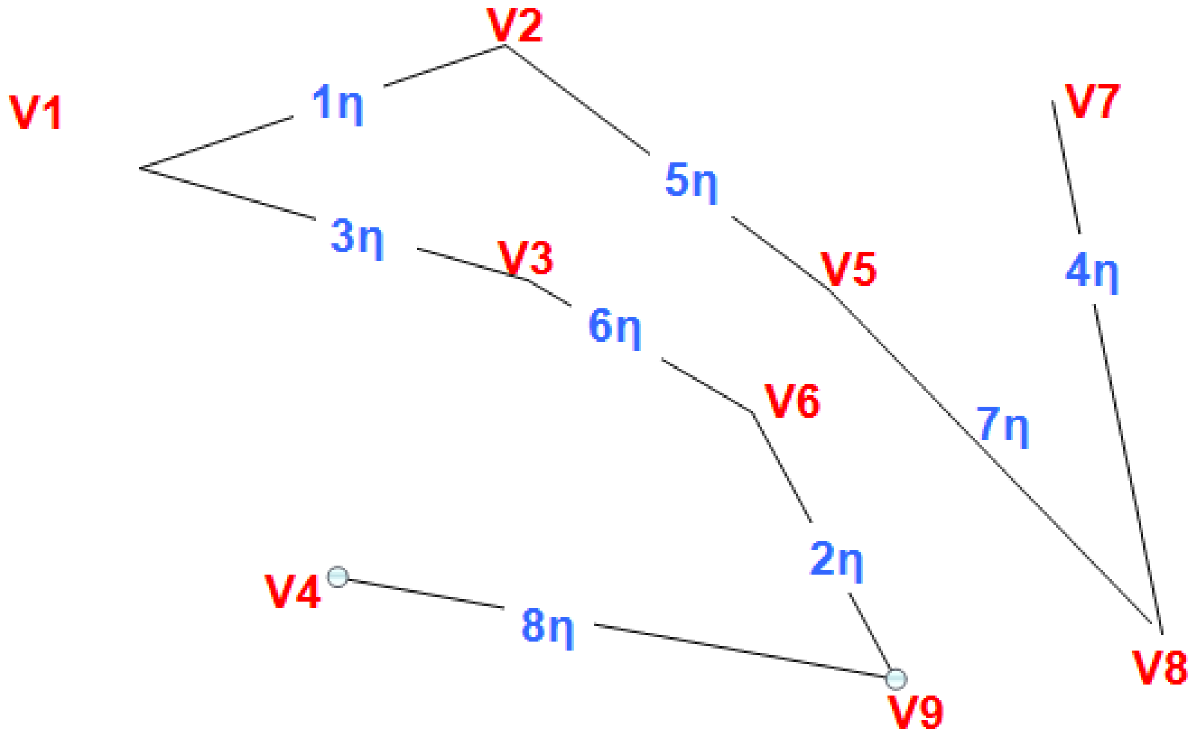
Γραμμές και βάρη 3

Πίνακας 7: Γραμμές και βάρη.

V1-V2	E2	2 [1^{η}]	V5-V6	E12	4 [όχι]
V6-V9	E11	2 [2^{η}]	V3-V5	E6	5 [όχι]
V1-V3	E1	3 [3^{η}]	V8-V9	E13	5 [όχι]
V7-V8	E14	3 [4^{η}]	V4-V9	E9	6 [8^{η}]
V2-V5	E5	4 [5^{η}]	V2-V3	E3	7
V3-V6	E8	4 [6^{η}]	V3-V4	E7	7
V5-V8	E10	4 [7^{η}]	V2-V7	E4	8

Άρα

Γράφημα 16: Το ελάχιστο Δέντρο.



[Στο βιβλίο:Σχήμα 5.4 (σελ 215)]

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Γράφημα 1- 6: Παραδείγματα για διδακτικούς σκοπούς της ενότητας.
- Γράφημα 6-16: Παραδείγματα του βιβλίου: Χατζηπαντελής Θ., Ανδρεάδης Ι., Μαθηματικά στις Πολιτικές Επιστήμες, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2005.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1-7: Παραδείγματα.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Γραφήματα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.