Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή
Ασκήσεις

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα

Ενότητα 1η: Εκλογικός Νόμος

- Δεν υπάρχουν Ασκήσεις στην πρώτη ενότητα

Ενότητα 2η: Θεωρία Συνόλων

- Εκφώνηση άσκησης 2.1

Έστω οι συλλογές αντικειμένων: A_1={1, {1, 2}, 2, 3, {2, 3}} A_2={1, {1, 2}, 1, 3, {2, 3}} A_3={1, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}} A_4={1, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1}} A_5={1, 2, 3, {1, 2}, {2, 3}} A_6={{3, 1}, {2, 1}, 1, {3, 2}} Πόσες από τις παραπάνω συλλογές αντικειμένων είναι σύνολα; Από αυτά τα σύνολα ποια είναι ίσα μεταξύ τους;

– Οδηγίες επίλυσης

1. Η συλλογή A_1 αποτελείται από τα εξής 5 διακεκριμένα αντικείμενα: 1, {1, 2}, 2, 3, {2, 3}. Παρατηρούμε ότι 2 από τα αντικείμενα αυτά τα {1, 2} και {2, 3} είναι τα ίδια σύνολα, αλλά αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του συνόλου. Άρα η συλλογή A_1 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_2 αποτελείται από τα εξής 5 αντικείμενα: 1, {1, 2}, 1, 3, {2, 3}. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο 1 εμφανίζεται περισσότερες από μία φορά στη συλλογή. Άρα η συλλογή A_2 δεν αποτελείται από διακεκριμένα αντικείμενα και δεν είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_3 αποτελείται από τα εξής 4 διακεκριμένα αντικείμενα: 1, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A3 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_4 αποτελείται από τα εξής 4 αντικείμενα: 1, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1} εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Το αντικείμενο {1, 2} είναι ίδιο με το αντικείμενο {2, 1}. Άρα η συλλογή A_4 δεν είναι σύνολο. Η συλλογή A_5 αποτελείται από τα εξής 5 διακεκριμένα αντικείμενα: 1, 2, 3, {1, 2}, {2, 3} εκ των οποίων 2 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A_5 είναι ένα σύνολο. Η συλλογή A_6 αποτελείται από τα εξής 4 διακεκριμένα αντικείμενα: {3, 1}, {2, 1}, 1, {3, 2} εκ των οποίων 3 είναι τα ίδια σύνολα. Άρα η συλλογή A_6 είναι σύνολο. Το σύνολο A1={1, {1, 2}, 2, 3, {2, 3}} μπορεί να γραφεί και ως εξής: {1, 2, 3, {1, 2}, {2, 3}}, δηλαδή όπως το σύνολο A_5 και συνεπώς τα δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους. Το σύνολο A_6={{3, 1}, {2, 1}, 1, {3, 2}} μπορεί να γραφεί

και ως εξής: {{1, 3}, {1, 2}, 1, {2, 3}}={1, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}} δηλαδή όπως το σύνολο A_3 και συνεπώς τα δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους.

- Εκφώνηση άσκησης 2.2

  Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

  (i) {Καραμανλής, Παπανδρέου}$\in${Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} (ii) {Καραμανλής, Παπανδρέου}$\subseteq${Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} (iii) {{Καραμανλής, Παπανδρέου}} $\subseteq${Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} (iv) {Καραμανλής, Παπανδρέου}$\in${{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} (v) {Καραμανλής, Παπανδρέου}$\subseteq${{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} (vi) {{Καραμανλής, Παπανδρέου}}$\subseteq${{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}}

  - Οδηγίες επίλυσης

    (i) Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} αποτελείται από τα εξής 5 στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης και προφανώς το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} δεν είναι κανένα από αυτά. Η πρόταση λοιπόν δεν είναι αληθής.

    (ii) Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελείται από τα εξής δύο στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου και καθένα από αυτά είναι και στοιχείο του συνόλου {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, οπότε η πρόταση είναι αληθής.

    (iii) Το σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}} έχει μόνο ένα στοιχείο: το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} το οποίο δεν είναι στοιχείο του συνόλου {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, οπότε η πρόταση δεν είναι αληθής.

    (iv) Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελεί ένα από τα δύο στοιχεία του συνόλου {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} και η πρόταση είναι αληθής.

    (v) Το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} αποτελείται από τα εξής δύο στοιχεία: Καραμανλής, Παπανδρέου και κανένα από αυτά τα στοιχεία δεν ανήκει στο σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}}. Η πρόταση λοιπόν δεν είναι αληθής.

(vi) Το σύνολο {{Καραμανλής, Παπανδρέου}} έχει μόνο ένα στοιχείο: το σύνολο {Καραμανλής, Παπανδρέου} το οποίο είναι και στοιχείο του συνόλου {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} και η πρόταση είναι αληθής.

- Εκφώνηση άσκησης 2.3

Έστω το σύνολο Α={Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}. Να ορίσετε το δυναμοσύνολο P(A) του συνόλου Α.

– Οδηγίες επίλυσης

Το δυναμοσύνολο του Α είναι P(A)={$\varnothing$, {Καραμανλής}, {Παπανδρέου}, {Παπαρήγα}, {Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Καραμανλής, Παπαρήγα}, {Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα}, {Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}}.

- Εκφώνηση άσκησης 2.4

Θεωρούμε τα σύνολα Α={Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} και Β={Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}. Να βρεθούν όλα τα υποσύνολα Χ του Α για τα οποία ισχύει: Β$\cap$Χ={Καραμανλής, Παπανδρέου}.

– Οδηγίες επίλυσης

Το δυναμοσύνολο του συνόλου Α={Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης} έχει ως εξής: P(A)={$\varnothing$, {Καραμανλής}, {Παπανδρέου}, {Παπαρήγα}, {Κωνσταντόπουλος}, {Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Καραμανλής, Παπαρήγα}, {Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Καρατζαφέρης}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα}, {Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}, {Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}, {Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}, {Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}} Θέλουμε να βρούμε τα σύνολα X $\in$ P(A) για τα οποία B$\cap$X={Καραμανλής, Παπανδρέου}, όπου B={Καραμανλής, Παπανδρέου, Παπαρήγα}. Συνεπώς το σύνολο X θα πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει τα στοιχεία Καραμανλής, Παπανδρέου αλλά όχι το στοιχείο Παπαρήγα, οπότε το σύνολο X θα μπορούσε να είναι ένα από τα παρακάτω: {{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Καρατζαφέρης}, {Καραμανλής, Παπανδρέου, Κωνσταντόπουλος, Καρατζαφέρης}}.

- Εκφώνηση άσκησης 2.5

  Έστω τα σύνολα A={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}, B={{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} και Γ={Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}. Να βρείτε τα σύνολα: A$\cap$B, A$\cup$B, A-B, A$\oplus$B, A$\cap$Γ, A$\cup$Γ, A-Γ, A$\oplus$Γ.

  - Οδηγίες επίλυσης

    A$\cap$B={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}$\cap${{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} = {{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} A$\cup$B={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}$\cup${{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} A-B={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}-{{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}} A$\oplus$B={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}$\oplus${{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}} A$\cap$Γ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}∩{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}=∅ Α∪Γ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}∪{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης} ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}, Τσοβόλας, Καρατζαφέρης} Α-Γ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}-{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης} ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}} Α⊕Γ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}}⊕{Τσοβόλας, Καρατζαφέρης} ={{Καραμανλής, Παπανδρέου}, {Παπαρήγα, Κωνσταντόπουλος}, {Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}, Τσοβόλας, Καρατζαφέρης}.

- Εκφώνηση άσκησης 2.6

Έστω Α το σύνολο όλων των Ελλήνων βουλευτών, Β το σύνολο των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ., Γ το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ., Δ το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε., Ε το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών, Ζ το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Δράμας, και Η το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης. Να εκφράσετε με συμβολισμούς της θεωρίας συνόλων τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία.

(ii) Το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρειας Δράμας.

(iii) Όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης ανήκουν είτε στη Νέα Δημοκρατία είτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είτε στο Κ.Κ.Ε.

(iv) Αν από τους βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας αφαιρέσουμε τους βουλευτές του ΠΑ.ΣΟ.Κ., όλοι οι υπόλοιποι βουλευτές ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία.

  - Οδηγίες επίλυσης

    (i) Αφού όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία, τότε όλα τα στοιχεία του συνόλου Ε που είναι το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Γρεβενών θα πρέπει να είναι και στοιχεία του συνόλου Γ που είναι το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ., οπότε: Ε⊆Γ.

(ii) Εφόσον το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρειας Δράμας τότε το σύνολο Δ που είναι το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα κοινό στοιχείο με το σύνολο Ζ που είναι το σύνολο των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Δράμας, οπότε $Δ \cap Ζ = \emptyset$. Ένας άλλος τρόπος για να συμβολίσουμε την παραπάνω πρόταση θα μπορούσε να είναι ο εξής: Αφού το Κ.Κ.Ε. δεν έχει κανένα βουλευτή στη εκλογική περιφέρειας Δράμας, τότε όλοι οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας ανήκουν στο συμπληρωματικό του συνόλου Δ ως προς το σύνολο Α δηλαδή το σύνολο όλων των Ελλήνων βουλευτών, οπότε $Ζ \subseteq C_A Δ$.

(iii) Το σύνολο Η των βουλευτών της εκλογικής περιφέρειας Β΄ Θεσσαλονίκης θα πρέπει να είναι υποσύνολο της ένωσης των συνόλων Β που είναι το σύνολο των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ., Γ που είναι το σύνολο των βουλευτών της Ν.Δ. και Δ που είναι το σύνολο των βουλευτών του Κ.Κ.Ε., οπότε $Η \subseteq Β \cup Γ \cup Δ$.

(iv) Οι βουλευτές της εκλογικής περιφέρειας Δράμας που απομένουν μετά την αφαίρεση των βουλευτών του ΠΑ.ΣΟ.Κ. αποτελούν το σύνολο Ζ-Β. Όλα τα στοιχεία αυτού του συνόλου θα πρέπει να ανήκουν στη Νέα Δημοκρατία δηλαδή στο σύνολο Γ, οπότε $Ζ - Β \subseteq Γ$.

- Εκφώνηση άσκησης 2.7

  Αν τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, και Η ορίζονται όπως παραπάνω, πως θα ερμηνεύατε τα σύνολα $C_A Β$, $C_A Β \cap Η$, $C_A Β \cap C_A Δ \cap Ζ$ και $(Β \cup Γ) \cap Ζ$.

  – Οδηγίες επίλυσης

    Το σύνολο $C_A Β$ αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο Α και δεν ανήκουν στο Β δηλαδή αποτελείται από όλους τους βουλευτές όλης της επικράτειας οι οποίοι δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. Το σύνολο $C_A Β \cap Η$, αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι δεν ανήκουν στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. και εκλέχθηκαν στη Β΄ Θεσσαλονίκης Το σύνολο $C_A Β \cap C_A Δ \cap Ζ$ αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι δεν ανήκουν ούτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. ούτε στο Κ.Κ.Ε. και εκλέχθηκαν στην εκλογική περιφέρεια Δράμας. Το σύνολο $(Β \cup Γ) \cap Ζ$ αποτελείται από τους βουλευτές οι οποίοι ανήκουν είτε στο ΠΑ.ΣΟ.Κ. είτε στη Ν.Δ. και εκλέχθηκαν στην εκλογική περιφέρεια Δράμας.

- Εκφώνηση άσκησης 2.8

  Έστω το σύνολο Α={ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ, ΒΕΝΙΖΕΛΟΣ, ΑΡΑΠΟΓΛΟΥ, ΤΣΟΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ, ΜΑΓΚΡΙΩΤΗΣ, ΓΚΙΟΥΛΕΚΑΣ, ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ, ΟΡΦΑΝΟΣ, ΠΑΠΑΘΕΜΕΛΗΣ, ΡΑΠΤΗ, ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ, ΚΑΛΑΦΑΤΗΣ, ΚΟΚΚΟΡΗΣ, ΧΟΥΡΜΟΥΖΙΑΔΗΣ, ΞΗΡΟΤΥΡΗ} και το σύνολο Β={ΠΑ.ΣΟ.Κ., Ν.Δ., Κ.Κ.Ε., ΣΥΝ}. Έστω ο μηχανισμός φ που αντιστοιχίζει καθέναν από τους βουλευτές του συνόλου Α στο πολιτικό κόμμα στο οποίο ανήκει, δηλαδή σε κάποιο από τα στοιχεία του συνόλου Β. Είναι η φ συνάρτηση; Αν η φ είναι συνάρτηση είναι ένα προς ένα;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Έχουμε φ(ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΒΕΝΙΖΕΛΟΣ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΑΡΑΠΟΓΛΟΥ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΤΣΟΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΜΑΓΚΡΙΩΤΗΣ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΚΑΣΤΑΝΙΔΗΣ)=ΠΑ.ΣΟ.Κ. φ(ΓΚΙΟΥΛΕΚΑΣ)=Ν.Δ. φ(ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ)=Ν.Δ. φ(ΟΡΦΑΝΟΣ)=Ν.Δ. φ(ΠΑΠΑΘΕΜΕΛΗΣ)=Ν.Δ. φ(ΡΑΠΤΗ)=Ν.Δ. φ(ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ)=Ν.Δ. φ(ΚΑΛΑΦΑΤΗΣ)=Ν.Δ. φ(ΚΟΚΚΟΡΗΣ)=Ν.Δ. φ(ΧΟΥΡΜΟΥΖΙΑΔΗΣ)=Κ.Κ.Ε. φ(ΞΗΡΟΤΥΡΗ)=ΣΥΝ.

    Η φ είναι μία συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β αφού όλα το κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του Β. Η φ είναι συνάρτηση επί του Β καθώς για κάθε στοιχείο του Β υπάρχει ένα πρότυπο στοιχείο στο Α. Η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση καθώς μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικά πρότυπα που αντιστοιχούν στην ίδια εικόνα και συνεπώς η φ δεν είναι ένα προς ένα.

- Εκφώνηση άσκησης 2.9

  Έστω ένα σύνολο Α ψηφοφόρων και ένα σύνολο Β πολιτικών κομμάτων. Ποια πιθανή ερμηνεία θα μπορούσατε να δώσετε στο καρτεσιανό γινόμενο ΑΧΒ; Έστω R_1 και R_2 δύο διμελείς σχέσεις από το Α στο Β. Αν η διμελής σχέση R_1={(α, β) | ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2000} και R_2={(α, β) | ο ψηφοφόρος α βλέπει θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2004} να ερμηνεύσετε τις παρακάτω διμελείς σχέσεις: $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $C_{AXB}R_1$ και $R1_-R_2$.

  - Οδηγίες επίλυσης

    Αν θεωρήσουμε ότι το διατεταγμένο ζεύγος (α, β) σημαίνει ότι ο ψηφοφόρος α ψηφίζει το πολιτικό κόμμα β, τότε μια πιθανή ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί στο καρτεσιανό γινόμενο ΑxΒ είναι ότι συμπεριλαμβάνει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους οι ψηφοφόροι του συνόλου Α θα μπορούσαν αν ψηφίσουν τα κόμματα του συνόλου Β. Η διμελής σχέση $R_1 \cap R_2$ περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β και το 2000 και το 2004. Η διμελής σχέση R1∪R2 περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β ή το 2000 ή το 2004. Η διμελής σχέση CAxBR1 περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α δεν έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2000. Η διμελής σχέση R1-R2 περιλαμβάνει τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) για τα οποία ο ψηφοφόρος α έβλεπε θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2000 αλλά δεν βλέπει θετικά το πολιτικό κόμμα β το 2004.

- Εκφώνηση άσκησης 2.10

  Να προσδιοριστεί ο αριθμός των ακεραίων μεταξύ 1 και 100 οι οποίοι διαιρούνται από καθέναν από τους ακεραίους 3,4 και 7.

  - Οδηγίες επίλυσης

    Έστω A1 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 3, A2 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 4 και A3 το σύνολο ακεραίων που διαιρούνται με το 7. Είναι προφανές ότι ο αριθμός που αναζητούμε είναι το A1∪A2∪A3. Έχουμε τα παρακάτω: $|A_1|= [100/ 3]=33$, $|A_2|= [100/ 4] =25$, $|A_3|= [100 /7] =14$ $|A_1 \cap A_2|= [100/ 3\times 4] =8$, $|A_1 \cap A_3|= [100/ 3 \times 7] =4$, $|A_2 \cap A_3|= [100/ 4 \times 7] =3$, και $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|= [100/ 3\times 4\times 7]=1$ Εφαρμόζοντας την αρχή του εγκλεισμού και του αποκλεισμού: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ οδηγούμαστε στο παρακάτω αποτέλεσμα: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|=33+25+14-8- 4-3+1=58$.

Ενότητα 3η: Απαρίθμηση

- Εκφώνηση άσκησης 3.1

  Έστω ότι το όνομα μίας μεταβλητής μπορεί να είναι είτε ένα γράμμα είτε ένα γράμμα ακολουθούμενο από ένα αριθμητικό ψηφίο. Πόσα διαφορετικά ονόματα μεταβλητών υπάρχουν;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Αρχικά πρέπει να σημειώσουμε ότι σε κάθε εκτέλεση του πειράματος θα συμβεί ακριβώς ένα από τα δύο παρακάτω πειράματα: Πείραμα Α: Το όνομα της μεταβλητής είναι ένα γράμμα. Πείραμα Β: Το όνομα της μεταβλητής είναι ένα γράμμα ακολουθούμενο από ένα αριθμητικό ψηφίο. Σύμφωνα με το κανόνα του αθροίσματος:

Αν θεωρήσουμε ότι το πείραμα Α έχει m πιθανά αποτελέσματα και το πείραμα Β έχει n πιθανά αποτελέσματα, τότε υπάρχουν m + n πιθανά αποτελέσματα όταν γίνεται ακριβώς ένα από τα δύο αυτά πειράματα. Το πείραμα Α έχει 24 πιθανά αποτελέσματα (το όνομα της μεταβλητής μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα 24 γράμματα). Σε κάθε εκτέλεση του πειράματος Β θα συμβούν και τα δύο παρακάτω πειράματα: Πείραμα Β1: Το πρώτο σύμβολο του ονόματος της μεταβλητής θα είναι ένα γράμμα. Πείραμα Β2: Το δεύτερο σύμβολο του ονόματος της μεταβλητής θα είναι ένα αριθμητικό ψηφίο. Σύμφωνα με το κανόνα του γινομένου: Αν θεωρήσουμε ότι το πείραμα Β1 έχει n1 πιθανά αποτελέσματα και το πείραμα Β2 έχει n2 πιθανά αποτελέσματα, τότε υπάρχουν n1 x n2 πιθανά αποτελέσματα όταν γίνονται και τα δύο αυτά πειράματα. Το πείραμα Β1 έχει 24 πιθανά αποτελέσματα (το πρώτο σύμβολο του ονόματος της μεταβλητής μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα 24 γράμματα). Το πείραμα Β2 έχει 10 πιθανά αποτελέσματα (το δεύτερο σύμβολο του ονόματος της μεταβλητής μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα 10 ψηφία). Συνεπώς το πείραμα Β έχει 24*10=240 πιθανά αποτελέσματα. Άρα υπάρχουν 240+24=264 διαφορετικά ονόματα μεταβλητών που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

- Εκφώνηση άσκησης 3.2

  Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συμβολοσειρές από τέσσερα διαφορετικά γράμματα;

  – Οδηγίες επίλυσης

    Το πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα διάταξης 4 από 24 αντικείμενα. Για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων, για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 23 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 23 γράμματα), για τη τρίτη θέση υπάρχουν 22 επιλογές γραμμάτων (από τα υπόλοιπα 22 γράμματα), και για τη τέταρτη θέση υπάρχουν 21 επιλογές (από τα υπόλοιπα 21 γράμματα). Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών με τέσσερα διαφορετικά γράμματα είναι P(24,4)= 24*23*22*21= 255024.

- Εκφώνηση άσκησης 3.3

  Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μικρότεροι από 4000 είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;

  – Οδηγίες επίλυσης

Ένας τετραψήφιος αριθμός είναι μικρότερος από 4000 όταν το πρώτο ψηφίο του είναι μικρότερο του 4. Άρα θα πρέπει πρώτα να τοποθετήσουμε στη θέση του πρώτου ψηφίου ένα από τους αριθμούς 1, 2, και 3 και στη συνέχεια να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς στις θέσεις των υπόλοιπων ψηφίων. Θα λύσουμε το πρόβλημα σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση τίθεται το ερώτημα: "Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 στη μία θέση;" Η προφανής απάντηση είναι P(3,1)=3. Στη δεύτερη φάση τίθεται το ερώτημα: "Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς στις τρεις υπόλοιπες θέσεις;" Η απάντηση είναι P(5,3)=5*4*3=60. Σύμφωνα με το κανόνα του γινομένου υπάρχουν 3*60=180 αριθμοί μικρότεροι του 4000.

- Εκφώνηση άσκησης 3.4

  Υποθέστε ότι δεν επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι άρτιοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Ένας αριθμός είναι άρτιος (διαιρείται με το 2) όταν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 2. Άρα θα πρέπει πρώτα να τοποθετήσουμε στη θέση του τελευταίου ψηφίου ένα από τους αριθμούς 2, και 8 και στη συνέχεια να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς στις θέσεις των υπόλοιπων ψηφίων. Θα λύσουμε το πρόβλημα σε δύο φάσεις: Στην πρώτη φάση τίθεται το ερώτημα: "Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε έναν από τους αριθμούς 2 και 8 στη μία θέση;" Η προφανής απάντηση είναι P(2,1)=2. Στη δεύτερη φάση τίθεται το ερώτημα: "Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς στις τρεις υπόλοιπες θέσεις;" Η απάντηση είναι P(5,3)=5*4*3=60. Σύμφωνα με το κανόνα του γινομένου υπάρχουν 2*60=120 άρτιοι αριθμοί.

- Εκφώνηση άσκησης 3.5

  Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συμβολοσειρές από τέσσερα γράμματα;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Για τη πρώτη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Αφού επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα και για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 24 επιλογές γραμμάτων. Το ίδιο ισχύει και για τη τρίτη και τέταρτη θέση. Άρα ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συμβολοσειρών με τέσσερα γράμματα είναι 244 =24*24*24*24=331.776.

- Εκφώνηση άσκησης 3.6

  Υποθέστε ότι επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί που να περιέχουν το ψηφίο 1 ή το ψηφίο 2 τουλάχιστον μία φορά είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Έστω B_1 το σύνολο που περιέχει τις διατάξεις που περιέχουν το ψηφίο 1 τουλάχιστον μία φορά και B_2 το σύνολο που περιέχει τις διατάξεις που περιέχουν το ψηφίο 2 τουλάχιστον μία φορά. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $B_1 \cup B_2$. Εφόσον γνωρίζουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου A θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $B_1 \cup B_2$ από τη σχέση:

    $|B_1 \cup B_2| = |A| - |C_A(B_1 \cup B_2)|$. Το σύνολο $|C_A(B_1 \cup B_2)|$ αποτελείται από τους τετραψήφιους αριθμούς που δεν περιέχουν ούτε το ψηφίο 1, ούτε το ψηφίο 2. Άρα για να βρούμε το $|C_A(B_1 \cup B_2)|$ αρκεί να κάνουμε το παρακάτω ερώτημα: Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 3, 5, 7, 8; Η συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί πρόβλημα διάταξης με επανάθεση 4 από 4 αντικείμενα. Άρα η λύση είναι: $|C_A(B_1 \cup B_2)| = n^k = 4^4 = 256$. Αφού όμως $B_1 \cup B_2 = |A| - |C_A(B_1 \cup B_2)| = 1296 - 256 = 1040$ είναι οι τετραψήφιοι αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 1 ή το ψηφίο 2 τουλάχιστον μία φορά.

- Εκφώνηση άσκησης 3.7

  Υποθέστε ότι επιτρέπονται επαναλήψεις. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί που να περιέχουν και το ψηφίο 1 και το ψηφίο 2 τουλάχιστον μία φορά είναι δυνατόν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7, 8;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Είναι φανερό ότι αναζητούμε τον πληθικό αριθμό της τομής $B_1 \cap B_2$ των δύο συνόλων. Από την αρχή του εγκλεισμού και του αποκλεισμού έχουμε:

    $|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| \Rightarrow |B_1 \cap B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cup B_2|$. Από το παράδειγμα 3.14 γνωρίζουμε ότι $|B_1| + |B_2| = 671$. Επίσης από το παράδειγμα 3.15 γνωρίζουμε ότι $|B_1 \cup B_2| = 1040$. Από τα παραπάνω έχουμε

$|B_1 \cap B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cup B_2|$ = 671+671- 1040=302. Άρα υπάρχουν 302 τετραψήφιοι αριθμοί που περιέχουν και το ψηφίο 1 και το ψηφίο 2 τουλάχιστον μία φορά.

- Εκφώνηση άσκησης 3.8

  Με πόσους τρόπους μπορούμε να δημιουργήσουμε συμβολοσειρές που αποτελούνται από τρεις παύλες και δύο τελείες;

  – Οδηγίες επίλυσης

    Υπάρχουν 5! τρόποι να δημιουργήσουμε συμβολοσειρές με 5 διαφορετικά σύμβολα. Επειδή 3 από αυτά θα είναι παύλες και 2 από αυτά τελείες, ο συνολικός αριθμός των είναι: 5! / 3! *2! = 120 6*2 = 10.

- Εκφώνηση άσκησης 3.9

  Έστω ότι σε ένα διαγώνισμα πρέπει να απαντήσουμε σε 8 από τις 10 ερωτήσεις. α) Πόσες επιλογές έχουμε; β) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε υποχρεωτικά στις τρεις πρώτες ερωτήσεις; γ) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε τουλάχιστον στις 4 από τις 5 πρώτες ερωτήσεις;

  – Οδηγίες επίλυσης

    α) Πρέπει να επιλέξουμε 8 από 10 αντικείμενα (χωρίς διάταξη, χωρίς επανάληψη). Ο συνολικός αριθμός των τρόπων είναι: C(10, 8)=10!/(8!2!)= 3.628.800/(40320*2)=45 β) Για να απαντήσουμε σε 8 ερωτήσεις συνολικά, πρέπει να απαντήσουμε τις τρεις πρώτες ερωτήσεις και άλλες 5 από τις υπόλοιπες 7. Δηλαδή, έχουμε να επιλέξουμε 5 από 7 αντικείμενα. Άρα C(7, 5)=7!/(5!2!)= 5.040/(120*2)=21. γ) Υπάρχουν δύο τρόποι να απαντήσουμε: Ο πρώτος τρόπος είναι να απαντήσουμε ακριβώς 4 ερωτήσεις από τις 5 πρώτες και 4 από τις 5 τελευταίες ερωτήσεις. Ο δεύτερος τρόπος είναι να απαντήσουμε και τις 5 πρώτες ερωτήσεις και άλλες 3 από τις 5 τελευταίες. Με το πρώτο τρόπο έχουμε C(5,4)*C(5,4) επιλογές. Με το δεύτερο τρόπο έχουμε C(5,5)*C(5,3) επιλογές. Το πείραμα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με έναν από τους δύο παραπάνω τρόπους. Συνεπώς εφαρμόζουμε το κανόνα του αθροίσματος: C(5,4)*C(5,4)+C(5,5)*C(5,3)=5*5+1*10=35.

- Εκφώνηση άσκησης 3.10

  Με πόσους τρόπους μπορούμε να προγραμματίσουμε 15 ώρες μελέτης σε πέντε μέρες έτσι ώστε να μελετούμε τουλάχιστον μία ώρα την ημέρα;

– Οδηγίες επίλυσης

Έχουμε να τοποθετήσουμε 15 ώρες (μπάλες) σε 5 μέρες (κουτιά) υπό την προϋπόθεση να μη μείνει κανένα κουτί άδειο. Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση προκύπτει από τον τύπο: C(15-1, 15-5)=C(14, 10)=1001.

- Εκφώνηση άσκησης 3.11

Ας δώσουμε απάντηση σε ένα από τα προβλήματα της εισαγωγής: Ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα 12 παικτών μπάσκετ ξεκινάει με άλλη πεντάδα σε κάθε αγώνα. Δοκιμάστε να υπολογίσετε μετά από πόσους αγώνες θα έχουν εξαντληθεί οι διαφορετικές επιλογές.

– Οδηγίες επίλυσης

Έχουμε να επιλέξουμε 5 από 12 παίκτες μπάσκετ. Η λύση προκύπτει από τον τύπο: C(12, 5)=762. Δηλαδή αυτή η ομάδα θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσει την ίδια πεντάδα μετά από 762 αγώνες. Συγκρίνετε τον αριθμό αυτό με την απάντηση που δώσατε όταν διαβάζατε την εισαγωγή.

- Εκφώνηση άσκησης 3.12

Ένας άνθρωπος καλεί 10 φίλους του για δείπνο. α) Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο αν δεν θέσουμε κανένα περιορισμό; β) Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο με οχτώ ή λιγότερους από αυτούς; γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει για δείπνο με δύο ή περισσότερους από αυτούς;

– Οδηγίες επίλυσης

α) Κάθε ένας από τους 10 φίλους έχει δύο επιλογές, να πάει ή να μην πάει στο δείπνο. Συνεπώς ο συνολικός πληθικός αριθμός του είναι 210=1024. β) Εφόσον το ερώτημα αφορά στο γεγονός Α={να πάει με οχτώ ή λιγότερους φίλους στο δείπνο} είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε το συμπληρωματικό γεγονός. Υπάρχει ένας τρόπος να πάει στο δείπνο με όλους τους φίλους του και C(10,9)=10 τρόποι να πάει με εννιά φίλους του στο δείπνο. Άρα υπάρχουν 1024-11=1013 τρόποι να πάει με δύο ή περισσότερους φίλους του για δείπνο. γ) Εφόσον το ερώτημα αφορά στο γεγονός Α={να πάει με δύο ή περισσότερους φίλους στο δείπνο} είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε το συμπληρωματικό γεγονός. Υπάρχει ένας τρόπος να πάει μόνος του για δείπνο και C(10,1)=10 τρόποι να πάει με έναν μόνο φίλο του. Άρα υπάρχουν 1024-11=1013 τρόποι να πάει με δύο ή περισσότερους φίλους του για δείπνο.

- Εκφώνηση άσκησης 3.13

  Δέκα παίκτες του μπάσκετ χωρίζονται τυχαία σε δύο ομάδες των 5 ατόμων. α) με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός σε ομάδες; Τρεις από αυτούς, ο Γιάννης, ο Τάσος και ο Αχιλλέας είναι φίλοι και θα ήθελαν να είναι συμπαίκτες. β) με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός σε ομάδες έτσι ώστε να είναι και οι τρεις συμπαίκτες; γ) με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός σε ομάδες έτσι ώστε ο Γιάννης και ο Αχιλλέας να είναι συμπαίκτες και ο Τάσος να είναι στην αντίπαλη ομάδα;

  - Οδηγίες επίλυσης

    α) Ας ονομάσουμε τις δύο ομάδες ως μπλε και κόκκινη. Μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα ως εξής: Θέλουμε να τοποθετήσουμε 5 μπλε και 5 κόκκινες μπάλες σε 10 αριθμημένα κουτιά (παίκτες). Η τοποθέτηση μίας χρωματιστής μπάλας σε ένα κουτί αντιστοιχεί στην επιλογή του συγκεκριμένου παίκτη για την ομάδα με το αντίστοιχο χρώμα. Συνεπώς ο συνολικός πληθικός αριθμός του είναι: 10!/(5!x5!)= 3.628.800/14400=252. β) Ας τοποθετήσουμε και τους τρεις φίλους στη μπλε ομάδα. Θα υπάρχουν 7!/(2!x5!)=5040/240=21 τρόποι. Αντίστοιχα υπάρχουν ακόμη 21 τρόποι οι τρεις φίλοι να είναι συμπαίκτες στην κόκκινη ομάδα. Άρα το γεγονός Α={οι τρεις φίλοι είναι συμπαίκτες} μπορεί να γίνει με 42 τρόπους. γ) Ας τοποθετήσουμε τους δύο φίλους στη μπλε ομάδα και τον έναν στη κόκκινη. Θα υπάρχουν 7!/(3!x4!)=5040/144=35 τρόποι. Αντίστοιχα υπάρχουν ακόμη 35 τρόποι οι δύο φίλοι να είναι στην κόκκινη ομάδα και ο τρίτος στη μπλε. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά 70 τρόποι.

- Εκφώνηση άσκησης 3.14

  Δέκα διαφορετικά άτομα μπαίνουν σε έναν ανελκυστήρα στο ισόγειο ενός εικοσαόροφου κτιρίου. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν; Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν όλοι σε διαφορετικούς ορόφους; Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν αν δεν θέσουμε κανένα περιορισμό;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Προφανώς σε έναν όροφο μπορούν να κατέβουν περισσότερα του ενός άτομα. Άρα ο συνολικός πληθικός αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών μπαλών (άτομα) σε 20 αριθμημένα κουτιά (όροφοι) με επανάληψη, δηλαδή 20^{10} = 10.240.000.000.000 Αν Α={σε κανένα όροφο δεν κατέβηκε περισσότερα από ένα άτομα} τότε ο πληθικός αριθμός του A ισούται με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης 10 διαφορετικών μπαλών (άτομα) σε 20 αριθμημένα κουτιά (όροφοι) χωρίς επανάληψη, δηλαδή P(20,10)= 670.442.572.800.

- Εκφώνηση άσκησης 3.15

  Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε k κόκκινες μπάλες και a άσπρες μπάλες σε n κουτιά, ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα από κάθε χρώμα;

  – Οδηγίες επίλυσης

    5 Αρχικά θα τοποθετήσουμε μία κόκκινη και μία άσπρη μπάλα σε κάθε κουτί. Μας απομένουν k-n κόκκινες μπάλες και a-n άσπρες μπάλες να τις τοποθετήσουμε στα n κουτιά. Συνεπώς θα έχουμε C(k-1, k-n) x C(a-1, a-n).

Ενότητα 4η: Θεωρία Πιθανοτήτων

- Εκφώνηση άσκησης 4.1

  Έστω ότι υπάρχουν τέσσερα πολιτικά κόμματα τα οποία έχουν κάποια πιθανότητα να αποκτήσουν την πλειοψηφία των εδρών μετά από την διεξαγωγή των προσεχών εκλογών. Επίσης γνωρίζετε ότι τα δύο πρώτα κόμματα έχουν την ίδια πιθανότητα να αποκτήσουν την πλειοψηφία των εδρών, και ότι τα άλλα δύο κόμματα έχουν τέσσερις φορές μικρότερη πιθανότητα να αποκτήσουν την πλειοψηφία των εδρών. Να δώσετε το δειγματικό χώρο και την πιθανότητα του κάθε γεγονότος (του κάθε υποσυνόλου) του δειγματικού χώρου.

  – Οδηγίες επίλυσης

    Έστω τέσσερα πολιτικά κόμματα K_1, K_2, K_3, K_4 και τα γεγονότα A_1, A_2, A_3, A_4 όπου Ai={το πολιτικό κόμμα Ki κερδίζει την πλειοψηφία των εδρών μετά από την διεξαγωγή των προσεχών εκλογών}. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι $Ω=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Εφόσον τα δύο πρώτα κόμματα έχουν την ίδια πιθανότητα να αποκτήσουν την πλειοψηφία των εδρών θα πρέπει να ισχύει $P(A_1)=P(A_2)$. Επίσης αφού τα άλλα δύο κόμματα έχουν τέσσερις φορές μικρότερη πιθανότητα να αποκτήσουν την πλειοψηφία των εδρών θα πρέπει να ισχύει $P(A_3)=P(A_4) =¼P(A_1)$. Το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων A_1, A_2, A_3, A_4 πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα, οπότε: P(A1)+P(A2)+P(A3)+P(A4)=1 δηλαδή $P(A_1)+P(A_1)+¼P(A_1)+¼P(A_1)=1$ οπότε $P(A_1)=4/10$ και συνεπώς $P(A_2)=4/10$, $P(A_3)=1/10$, και $P(A_4)=1/10$.

- Εκφώνηση άσκησης 4.2

  Ζητήσαμε τη γνώμη τριών ανθρώπων για την σημερινή οικονομική κατάσταση στην Ελλάδα και θα συμβολίσουμε με θ αν η γνώμη είναι θετική και με α αν η γνώμη είναι αρνητική. Ένας δειγματικός χώρος για το πείραμα αυτό θα μπορούσε να είναι ο Ω={ααα, ααθ, αθα, αθθ, θαα, θαθ, θθα, θθθ}. Περιγράψτε με λόγια το καθένα από τα παρακάτω γεγονότα: Α={ααα, θθθ} Β={ααθ, αθα, αθθ, θαα, θαθ, θθα} Γ={ααθ, αθθ, θαθ, θθθ} Δ={ααα, αθα, θαα, θθα} Ποια η σχέση των γεγονότων Α και Γ με τα γεγονότα Β και Δ αντίστοιχα; Ποια η πιθανότητα του κάθε γεγονότος;

  – Οδηγίες επίλυσης

    Το γεγονός Α={ααα, θθθ} περιέχει τα στοιχεία (αποτελέσματα) ααα και θθθ δηλαδή το γεγονός Α θα πραγματοποιηθεί όταν και οι τρεις απαντήσουν θετικά ή όταν και οι τρεις θα απαντήσουν αρνητικά. Με άλλα λόγια το γεγονός Α θα πραγματοποιηθεί αν και οι τρεις δώσουν την ίδια απάντηση. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 8 στοιχεία και καθένα από αυτά έχει την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθεί. Εφόσον το γεγονός Α αποτελείται από 2 σημεία η πιθανότητα είναι P(A)=2/8. Το γεγονός Β={ααθ, αθα, αθθ, θαα, θαθ, θθα} περιέχει τα στοιχεία (αποτελέσματα) ααθ, αθα, αθθ, θαα, θαθ, θθα δηλαδή όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου εκτός από αυτά του γεγονότος Α δηλαδή το γεγονός Β είναι το συμπληρωματικό του Α. Με άλλα λόγια το γεγονός Β θα πραγματοποιηθεί αν δεν υπάρχει απόλυτη ταύτιση ανάμεσα στις τρεις απαντήσεις. Εφόσον το γεγονός Β είναι το συμπληρωματικό του Α η πιθανότητα του είναι P(B)=1- P(A)=1-2/8=6/8. Το γεγονός Γ={ααθ, αθθ, θαθ, θθθ} αποτελείται από τα αποτελέσματα ααθ, αθθ, θαθ και θθθ. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των αποτελεσμάτων είναι ότι η τρίτη απάντηση είναι θετική, και μάλιστα τα αποτελέσματα αυτά είναι τα μόνα του δειγματικού χώρου που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό. Άρα το γεγονός Γ θα πραγματοποιηθεί όταν ο τελευταίος από τους ερωτώμενους απαντήσει θετικά. Εφόσον το γεγονός Γ αποτελείται από 4 σημεία η πιθανότητα του είναι P(Γ)=4/8. Το γεγονός Δ={ααα, αθα, θαα, θθα}αποτελείται από τα αποτελέσματα ααα, αθα, θαα και θθα. Το γεγονός Δ θα πραγματοποιηθεί όταν ο τελευταίος από τους ερωτώμενους απαντήσει αρνητικά. Εφόσον το γεγονός Δ είναι το συμπληρωματικό του Γ η πιθανότητα του είναι P(Δ)=1-P(Γ)=1-4/8=4/8.

- Εκφώνηση άσκησης 4.3

Σε μία πόλη το 10% του πληθυσμού είναι άστεγοι, το 20% είναι άνεργοι, και το 75% έχει και σπίτι και εργασία. Επιλέγουμε τυχαία κάποιο άτομο από την πόλη. Ποια η πιθανότητα να έχει σπίτι ή εργασία;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Έστω A το σύνολο των κατοίκων της πόλης που είναι άστεγοι, και B το σύνολο των κατοίκων της πόλης που είναι άνεργοι. Προφανώς, $P(A)=0{,}1$ και $P(B)=0{,}2$. Το σύνολο των κατοίκων της πόλης πού έχει σπίτι θα είναι το συμπληρωματικό του A και το σύνολο των κατοίκων της πόλης που έχει εργασία θα είναι το συμπληρωματικό του B, οπότε $P(A')=0{,}9$ και $P(B')=0{,}8$. Το σύνολο των κατοίκων της πόλης πού έχει και σπίτι και εργασία θα είναι το $A'\cap B'$ και η πιθανότητά να επιλέξουμε τυχαία κάποιο άτομο από την πόλη που να έχει και σπίτι και εργασία θα είναι $P(A'\cap B')=0{,}75$. Η πιθανότητα να έχει κάποιος σπίτι ή εργασία θα είναι $P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B') = 0{,}9+0{,}8-0{,}75=0{,}95$.

- Εκφώνηση άσκησης 4.4

Πριν να φτάσει ένα νομοσχέδιο στον πρόεδρο των Η.Π.Α. θα πρέπει πρώτα να περάσει και από τη Βουλή των Αντιπροσώπων και από τη Γερουσία. Έστω ότι η Βουλή των Αντιπροσώπων εγκρίνει το 60% των νομοσχεδίων και η Γερουσία το 75%. Εάν γνωρίζουμε ότι το 95% των νομοσχεδίων έχει πάρει έγκριση τουλάχιστον από ένα από τα δύο παραπάνω σώματα, τι πιθανότητα έχει ένα νομοσχέδιο να φτάσει στον πρόεδρο των Η.Π.Α.;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Αν ορίσουμε το γεγονός A={η Βουλή των Αντιπροσώπων εγκρίνει το νομοσχέδιο} και το γεγονός B ={η Γερουσία εγκρίνει το νομοσχέδιο}, τότε το $A\cup B$ θα είναι το γεγονός {τουλάχιστον από ένα από τα δύο παραπάνω σώματα εγκρίνει το νομοσχέδιο} και το $A\cap B$ θα είναι το γεγονός {και τα δύο παραπάνω σώματα εγκρίνει το νομοσχέδιο} που είναι και το ζητούμενο γιατί για να φτάσει ένα νομοσχέδιο στον πρόεδρο των Η.Π.Α. θα πρέπει πρώτα να περάσει και από τη Βουλή των Αντιπροσώπων και από τη Γερουσία. Δίνονται τα παρακάτω: $P(A\cup B) = 0{,}95$, $P(A) = 0{,}60$, $P(B)=0{,}75$ και επειδή ισχύει $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ μπορούμε να λύσουμε ως προς $P(A\cap B)=0{,}75+0{,}60-0{,}95=0{,}40$, δηλαδή το 40% των νομοσχεδίων φτάνει στον πρόεδρο των Η.Π.Α.

- Εκφώνηση άσκησης 4.5

  Ας υποθέσουμε ότι από τους 350000 κατοίκους του Δήμου Θεσσαλονίκης, οι 20 είναι μέλη τρομοκρατικών οργανώσεων. Έστω ότι ένα ινστιτούτο ψυχολογικών ερευνών έχει αναπτύξει ένα σύστημα προηγμένης τεχνολογίας το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε αν κάποιος είναι μέλος τρομοκρατικής οργάνωσης ή όχι με πιθανότητα επιτυχούς εκτίμησης ίση με 99,9%. Η πιθανότητα επιτυχούς εκτίμησης φαίνεται να είναι κάτι παραπάνω από ικανοποιητική. Κάποιοι θα μπορούσαν να πουν ότι το σύστημα είναι σχεδόν τέλειο! Θα συμφωνούσατε με τη μαζική χρήση αυτού του συστήματος στο σύνολο των κατοίκων του Δήμου Θεσσαλονίκης;

  - Οδηγίες επίλυσης

    Ας ορίσουμε το γεγονός Α={ο εξεταζόμενος είναι μέλος τρομοκρατικής οργάνωσης} και το γεγονός Β={το σύστημα του ινστιτούτου ψυχολογικών ερευνών δίνει θετικό αποτέλεσμα} δηλαδή το σύστημα δίνει το αποτέλεσμα ότι ο εξεταζόμενος είναι τρομοκράτης. Η πιθανότητα να είναι κάποιος από το γενικό πληθυσμό των 350000 κατοίκων του Δήμου Θεσσαλονίκης τρομοκράτης είναι 20/350000, δηλαδή P(A)=1/17500 και η πιθανότητα του συμπληρωματικού του γεγονότος Α΄={ο εξεταζόμενος δεν είναι μέλος τρομοκρατικής οργάνωσης} είναι 1-P(A)=1-1/17500= 17499/17500. Η πιθανότητα να δώσει το τεστ θετικό αποτέλεσμα όταν αυτός που εξετάζεται είναι τρομοκράτης είναι P(B|A)=0,99 και η πιθανότητα να δώσει το τεστ θετικό αποτέλεσμα όταν αυτός που εξετάζεται δεν είναι τρομοκράτης είναι P(B|A΄)=0,01. Ζητάμε τον υπολογισμό της πιθανότητας να είναι κάποιος τρομοκράτης δεδομένου ότι έκανε το σύστημα δίνει θετική απάντηση δηλαδή αναζητούμε την πιθανότητα P(A|B). Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

    P(A/B) = P(B/A) P(A)/ P(B/A) P(A) + P(B/A’) P(A’) = [0,999/17.500] / [0,999/17.500] + 0.001(17.499/17.500)= 0,054. Δηλαδή η πιθανότητα να είναι κάποιος πραγματικά τρομοκράτης δεδομένου ότι το σύστημα δίνει θετική απάντηση είναι ελάχιστη. Όσο σημαντικό και αν είναι το πρόβλημα της τρομοκρατίας η μαζική εφαρμογή αυτού του συστήματος στο σύνολο του πληθυσμού θα οδηγούσε στον άδικο στιγματισμό του 0,1% των 349980 αθώων ανθρώπων, δηλαδή 349 αθώοι άνθρωποι θα αναγκαζόταν να υποστούν τις συνέπειες μιας τέτοιας μαζικής εφαρμογής.

- Εκφώνηση άσκησης 4.6

Στην πολιτεία της Νέας Υόρκης κάθε μέρα γίνονται μία κλήρωση ενός τριψήφιου αριθμού (001-999). Στις 11 Σεπτεμβρίου του 2002, δηλαδή στην πρώτη επέτειο της τρομοκρατικής επίθεσης στους δίδυμους πύργους της Νέας Υόρκης, κληρώθηκε ο αριθμός 911 (ένατος μήνας ενδέκατη ημέρα). Το αποτέλεσμα της κλήρωσης θεωρήθηκε από κάποιους ως μία εξαιρετική «σημαδιακή» σύμπτωση. Συμφωνείτε με την εκτίμηση αυτή;

  – Οδηγίες επίλυσης

  Σε μία οποιαδήποτε ημέρα οποιοσδήποτε από τους τριψήφιους αριθμούς από 001 μέχρι 999 έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί στην κλήρωση για το λαχείο της πολιτεία της Νέας Υόρκης. Άρα και τη συγκεκριμένη ημέρα, στις 11 Σεπτεμβρίου του 2002 η πιθανότητα να κληρωθεί ο αριθμός 911 ήταν ίδια, δηλαδή 1/999. Η πιθανότητα αυτή δεν είναι τόσο μικρή έτσι ώστε το γεγονός αυτό να θεωρηθεί ως μία εξαιρετική σύμπτωση

- Εκφώνηση άσκησης 4.7

Έστω ότι 30 φοιτητές και 30 φοιτήτριες του Τμήματος Πολιτικών Επιστημών κάνουν αίτηση για την εισαγωγή τους στα δύο μεταπτυχιακά προγράμματα του Τμήματος. Τα αποτελέσματα της επιλογής έχουν ως εξής: Στο πρώτο μεταπτυχιακό πρόγραμμα επιλέχθηκαν 5 από τις 25 φοιτήτριες και 3 από τους από τους 18 φοιτητές. Στο δεύτερο μεταπτυχιακό πρόγραμμα επιλέχθηκαν 4 από τις 5 φοιτήτριες και 9 από τους από τους 12 φοιτητές. Θεωρείτε ότι το τμήμα έχει την τάση να επιλέγει περισσότερες γυναίκες από ότι άνδρες για τα μεταπτυχιακά του προγράμματα; Διαφοροποιείται η απάντησή σας αν συγκρίνετε τα ποσοστά στα δύο τμήματα ξεχωριστά από ότι αν τα συγκρίνετε στο σύνολο;

  – Οδηγίες επίλυσης

  Αν υπολογίσουμε τα ποσοστά στο σύνολο του Τμήματος θα βρούμε ότι από τους 30 φοιτητές επιλέχθηκαν 12 δηλαδή ποσοστό 40%, ενώ από τις 30 φοιτήτριες επιλέχθηκαν 9 δηλαδή ποσοστό 30%. Με μία πρώτη ματιά λοιπόν κάποιος θα μπορούσε να πει ότι το Τμήμα έχει την τάση να επιλέγει περισσότερους άνδρες από ότι γυναίκες για τα μεταπτυχιακά του προγράμματα. Αν υπολογίσουμε τα ποσοστά σε κάθε μεταπτυχιακό πρόγραμμα ξεχωριστά, θα παρατηρήσουμε ότι στο πρώτο από αυτά έχουμε: επιλογή των 5 από τις 25 φοιτήτριες δηλαδή πιθανότητα 1/5 και επιλογή των 3 από τους 18 φοιτητές δηλαδή πιθανότητα 1/6. Στο δεύτερο μεταπτυχιακό πρόγραμμα έχουμε: επιλογή των 4 από τις 5 φοιτήτριες δηλαδή πιθανότητα 4/5 και επιλογή των 9 από τους 12 φοιτητές δηλαδή πιθανότητα 3/4. Συνεπώς και στα δύο μεταπτυχιακά προγράμματα η πιθανότητα επιλογής φοιτήτριας είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα επιλογής φοιτητή. Πως εξηγείται αυτό το παράδοξο; Το παράδοξο αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως το παράδοξο του Simpson και έχει να κάνει με το γεγονός ότι συγκεντρώσαμε στοιχεία από δύο διαφορετικές ομάδες με διαφορετικό πλήθος. Το ότι επιλέχθηκε συνολικά το 40% των φοιτητών και μόλις το 30% των φοιτητριών δεν έχει να κάνει με καμία σεξιστική πολιτική επιλογή του Τμήματος. Η εξήγηση του παράδοξου κρύβεται πίσω από το γεγονός ότι στο δεύτερο μεταπτυχιακό πρόγραμμα μπορούσε κάποιος να εισαχθεί σχεδόν χωρίς προσπάθεια, αφού, ανεξαρτήτως φύλου, επιλέχθηκαν 13 στους 17 φοιτητές που έκαναν αίτηση. Αντίθετα στο πρώτο μεταπτυχιακό πρόγραμμα ο συναγωνισμός ήταν πολύ εντονότερος αφού επιλέχθηκαν μόλις 8 από τους 43. Το γεγονός ότι επιλέχθηκε συνολικά μικρότερος αριθμός φοιτητριών οφείλεται αποκλειστικά στο ότι η συντριπτική πλειοψηφία τους ανταγωνίστηκε για μία θέση στο πρώτο πρόγραμμα.

- Εκφώνηση άσκησης 4.8

Έστω ότι έχετε 3 νομίσματα εκ των οποίων το ένα δεν είναι συμμετρικό. Το μη συμμετρικό νόμισμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε η πιθανότητα να εμφανιστεί η πλευρά «γράμματα» να είναι ίση με 0,8. Αν επιλέξετε στην τύχη ένα νόμισμα ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξετε το μη συμμετρικό; Έστω ότι επιλέγετε στη τύχη ένα νόμισμα και σε τρεις συνεχόμενες ρίψεις διαπιστώνετε ότι και τις τρεις φορές ήρθαν γράμματα. Ποια η πιθανότητα να είναι το νόμισμα αυτό το μη συμμετρικό;

  – Οδηγίες επίλυσης

  Έστω ότι έχετε 3 νομίσματα εκ των οποίων το ένα δεν είναι συμμετρικό. Το μη συμμετρικό νόμισμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε η πιθανότητα να εμφανιστεί η πλευρά «γράμματα» να είναι ίση με 0,8. Αν επιλέξετε στην τύχη ένα νόμισμα ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξετε το μη συμμετρικό; Έστω ότι επιλέγετε στη τύχη ένα νόμισμα και σε τρεις συνεχόμενες ρίψεις διαπιστώνετε ότι και τις τρεις φορές ήρθαν γράμματα. Ποια η πιθανότητα να είναι το νόμισμα αυτό το μη συμμετρικό; Ας ορίσουμε το γεγονός Α={επιλέγουμε το μη συμμετρικό νόμισμα} και το γεγονός Β={ρίχνουμε το νόμισμα 3 φορές και διαπιστώνουμε ότι και τις τρεις φορές ήρθαν γράμματα} Η πιθανότητα να επιλέξουμε το μη συμμετρικό είναι P(A)=1/3 και η πιθανότητα του συμπληρωματικού του γεγονότος A΄={επιλέγουμε ένα συμμετρικό νόμισμα } είναι 1-P(A)=1-1/3= 2/3. Η πιθανότητα να ρίξουμε το μη συμμετρικό νόμισμα 3 φορές και να φέρουμε γράμματα και τις τρεις φορές είναι P(B|A)=0,8*0,8*0,8=0,512 και η πιθανότητα να ρίξουμε ένα συμμετρικό νόμισμα 3 φορές και να φέρουμε γράμματα και τις τρεις φορές είναι P(B|A΄)=0,5*0,5*0,5=0,125. Ζητάμε τον υπολογισμό της πιθανότητας να έχουμε επιλέξει το μη συμμετρικό νόμισμα δεδομένου ότι φέραμε γράμματα και τις τρεις φορές που το ρίξαμε δηλαδή αναζητούμε την πιθανότητα P(A|B). Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

P(A/B) = P(B/A) P(A)/ P(B/A) P(A) + P(B/A’) P(A’)=

(0,512*1/3)/ (0,512*1/3)+(0,125*2/3) = 0,67.

Δηλαδή γνωρίζοντας ότι φέραμε γράμματα και τις τρεις φορές που ρίξαμε το νόμισμα η πιθανότητα να είναι το μη συμμετρικό αυξήθηκε από την εκ των προτέρων τιμή του 1/3 στην εκ των υστέρων εκτίμηση του 0,67.

- Εκφώνηση άσκησης 4.9

Αποδείξτε ότι αρκούν 23 άτομα για να υπάρχει πιθανότητα μεγαλύτερη από 0,5 να βρεθούν ανάμεσά τους τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

  – Οδηγίες επίλυσης

  Το καθένα από τα 23 άτομα μπορεί να έχει γεννηθεί οποιαδήποτε από τις 366 ημέρες του χρόνου. Γενικά τα 23 άτομα μπορεί να έχουν γεννηθεί με 36623 διαφορετικούς τρόπους, αφού πρόκειται για την τοποθέτηση 23 αντικειμένων σε 366 θέσεις, όπου σε κάθε θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε περισσότερα του ενός αντικείμενα. Εφόσον μας ζητείται να βρεθούν ανάμεσά τους τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε το συμπληρωματικό γεγονός, δηλαδή να βρούμε με πόσους τρόπους μπορεί να έχουν γεννηθεί 23 άτομα σε διαφορετικές ημέρες. Η λύση δίνεται από το τύπο των μη επαναληπτικών τοποθετήσεων 23 αντικειμένων σε 366 θέσεις, δηλαδή έχουμε 366!/343! Η πιθανότητα λοιπόν να έχουν και οι 23 διαφορετική μέρα γενεθλίων είναι $(366!/343!)/366^{23}$ = 0,494. Συνεπώς η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που να έχουν τα ίδια γενέθλια είναι

1- 0,494=0,506. Σημειώνουμε ότι αν είχαμε 22 άτομα, η ίδια πιθανότητα θα ήταν 1-(366!/344!)/366^{22}=0,475, δηλαδή 23 είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων για τα οποία η ζητούμενη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από 0,5.

- Εκφώνηση άσκησης 4.10

Αποδείξτε ότι χρειαζόμαστε περισσότερα από 258 άτομα για να υπάρχει πιθανότητα μεγαλύτερη από 0,5 να βρεθούν ανάμεσά τους τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια συγκεκριμένη ημέρα.

  – Οδηγίες επίλυσης

  Ας υποθέσουμε ότι έχουμε k άτομα. Το καθένα από τα k άτομα μπορεί να έχει γεννηθεί οποιαδήποτε από τις 366 ημέρες του χρόνου, οπότε τα k άτομα μπορεί να έχουν γεννηθεί με 366k διαφορετικούς τρόπους, αφού πρόκειται για την τοποθέτηση k αντικειμένων σε 366 θέσεις, όπου σε κάθε θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε περισσότερα του ενός αντικείμενα. Εφόσον μας ζητείται να βρεθούν ανάμεσά τους τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια συγκεκριμένα ημέρα, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε το συμπληρωματικό γεγονός, δηλαδή να βρούμε με πόσους τρόπους μπορεί να έχουν γεννηθεί k άτομα σε έτσι Η πιθανότητα να μην έχει γεννηθεί κανένας από τα άτομα τη συγκεκριμένη ημέρα είναι: 365^k /366^k . Η πιθανότητα να έχει γεννηθεί ακριβώς ένας τη συγκεκριμένη ημέρα είναι: 365^{k-1}/366^k . Συνεπώς για να είναι η πιθανότητα να έχουν γεννηθεί τουλάχιστον δύο άτομα τη συγκεκριμένη ημέρα μεγαλύτερη του 0,5 θα πρέπει να ισχύει: 365^k /366^k + 365^{k-1}/366^k < 0,5 ή μετά την απλοποίηση 365^{k-1} / 366^{k-1} < 0,5. Λύνοντας την ανισότητα ως προς k θα έχουμε k>254,345. Δηλαδή χρειαζόμαστε περισσότερα από 254 άτομα για να είναι η πιθανότητα να έχουν γεννηθεί τουλάχιστον δύο άτομα τη συγκεκριμένη ημέρα μεγαλύτερη του 0,5.

- Εκφώνηση άσκησης 4.11

Αν μοιράσουμε τα 52 χαρτιά σε 4 13αδες (στο μπριτζ) ποια η πιθανότητα να πάρουμε μία συγκεκριμένη 13αδα; Ποια η πιθανότητα να πάρουμε και τους τέσσερις άσσους;

  – Οδηγίες επίλυσης

  Υπάρχουν C(52, 13)=6,35*10^{11} τρόποι για να πάρουμε 13 από τα 52 χαρτιά, οπότε η πιθανότητα να πάρουμε μία συγκεκριμένη 13αδα είναι 1/6,35*10^{11} δηλαδή μικρότερη από 1 στα 600 δισεκατομμύρια. Έστω ότι παίρνουμε και τους τέσσερις άσσους, οπότε έχουν μείνει 48 χαρτιά από τα οποία πρέπει να πάρουμε άλλα 9. Υπάρχουν C(48, 9)=$1,6*10^9$ τρόποι για να πάρουμε 9 από τα 48 χαρτιά, οπότε η πιθανότητα να πάρουμε και τους τέσσερις άσσους είναι $1/1,6*10^9$ δηλαδή μικρότερη από 1 στα 1,6 δισεκατομμύρια.

- Εκφώνηση άσκησης 4.12

  Έστω ότι 8 κορυφαία στελέχη της Ν.Δ. πρόκειται να φωτογραφηθούν όλοι μαζί. Αν παραταχθούν τυχαία, ποια η πιθανότητα ο Κώστας Καραμανλής να είναι δίπλα στη Ντόρα Μπακογιάννη;

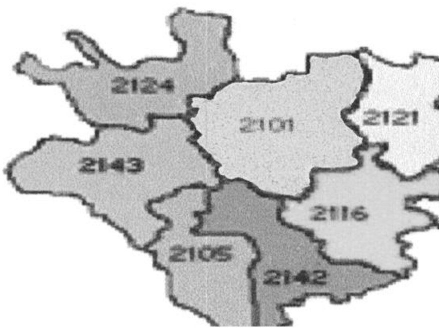
  – Οδηγίες επίλυσης

    Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούν να παραταχθούν τυχαία τα 8 στελέχη, όσες οι μεταθέσεις 8 αντικειμένων, δηλαδή υπάρχουν 8!=40320 διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να παραταχθούν. Εφόσον θέλουμε δύο από τα στελέχη να είναι δίπλα ο ένας στον άλλο θα πρέπει να τους θεωρήσουμε ως ένα αντικείμενο. Συνεπώς υπάρχουν 7!=5040 τρόποι για να παραταχθούν οι υπόλοιποι 6 μαζί με το ζευγάρι. Επειδή όμως επιτρέπεται και οι μεταθέσεις μεταξύ των δύο στελεχών που αποτελούν το ζευγάρι ο αριθμός αυτός πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί δύο. Συνολικά λοιπόν υπάρχουν 10080 τρόποι με τους οποίους μπορούν να παραταχθούν τα 8 στελέχη ικανοποιώντας την συνθήκη που θέσαμε, και η πιθανότητα να είναι ο Καραμανλής δίπλα στην Μπακογιάννη είναι 10080/40320=1/4.

Ενότητα 5η: Γραφήματα και Ειδικά Γραφήματα

- Εκφώνηση άσκησης 5.1

  Έστω ο παρακάτω χάρτης που περιλαμβάνει ένα σύνολο από τους πρωτοβάθμιους Ο.Τ.Α. που βρίσκονται στο δυτικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης:



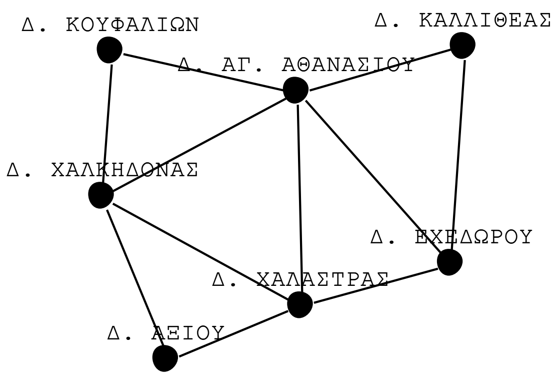
Χάρτης 1: Πρωτοβάθμιοιοι Ο.Τ.Α. στο δυτικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης

Οι κωδικοί αριθμοί που εμφανίζονται στο χάρτη αντιστοιχούν με τις ονομασίες των Ο.Τ.Α. όπως παρακάτω:

2101 ΔΗΜΟΣ ΑΓΙΟΥ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
2105 ΔΗΜΟΣ ΑΞΙΟΥ
2116 ΔΗΜΟΣ ΕΧΕΔΩΡΟΥ
2121 ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΛΙΘΕΑΣ
2124 ΔΗΜΟΣ ΚΟΥΦΑΛΙΩΝ
2142 ΔΗΜΟΣ ΧΑΛΑΣΤΡΑΣ
2143 ΔΗΜΟΣ ΧΑΛΚΗΔΟΝΑΣ

Να κατασκευαστεί γράφημα στο οποίο κάθε γραμμή να αντιπροσωπεύει την ύπαρξη κοινού συνόρου ανάμεσα στους αντίστοιχους Ο.Τ.Α. Τι ερμηνεία δίνετε στο βαθμό των σημείων;

- Οδηγίες επίλυσης
- Το γράφημα που προκύπτει από τον χάρτη που περιλαμβάνει ένα σύνολο από τους πρωτοβάθμιους Ο.Τ.Α. που βρίσκονται στο δυτικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης όταν κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει την ύπαρξη κοινού συνόρου ανάμεσα στους αντίστοιχους Ο.Τ.Α. είναι το παρακάτω:

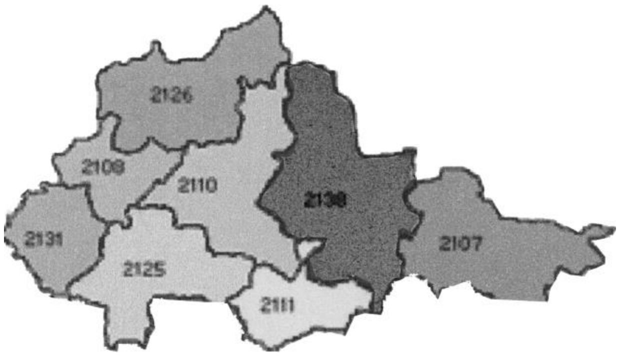


Γράφημα 1: Πρωτοβάθμιοι Ο.Τ.Α.

Οι βαθμός του κάθε σημείου (Ο.Τ.Α.) αντιστοιχεί στο πλήθος των Ο.Τ.Α. με τους οποίους συνορεύει. Έτσι, το γράφημα μας δίνει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε ότι ο Δήμος Αγίου Αθανασίου είναι αυτός που συνορεύει με όλους τους υπόλοιπους Ο.Τ.Α. (βαθμός σημείου ίσος με πέντε) ενώ οι περισσότερο «απομονωμένοι» είναι οι Ο.Τ.Α. Αξιού, Κουφαλιών και Καλλιθέας με βαθμό ίσο με δύο.

- Εκφώνηση άσκησης 5.2

Έστω ο παρακάτω χάρτης που περιλαμβάνει ένα σύνολο από τους πρωτοβάθμιους Ο.Τ.Α. που βρίσκονται στο βόρειο, βορειοανατολικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης:



Χάρτης 2: Πρωτοβάθμιοιοι Ο.Τ.Α. στο βόρειο, βορειοανατολικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης

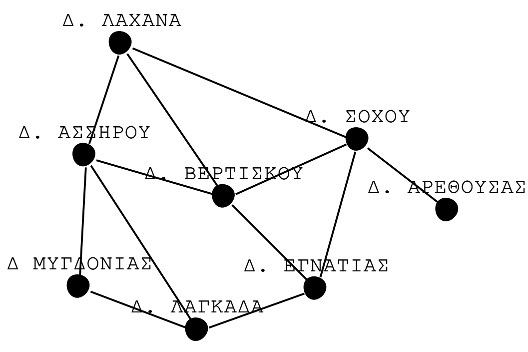
Οι κωδικοί αριθμοί που εμφανίζονται στο χάρτη αντιστοιχούν με τις ονομασίες των Ο.Τ.Α. όπως παρακάτω:

2131	ΔΗΜΟΣ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ
2108	ΔΗΜΟΣ ΑΣΣΗΡΟΥ
2126	ΔΗΜΟΣ ΛΑΧΑΝΑ
2110	ΔΗΜΟΣ ΒΕΡΤΙΣΚΟΥ
2125	ΔΗΜΟΣ ΛΑΓΚΑΔΑ
2138	ΔΗΜΟΣ ΣΟΧΟΥ
2111	ΔΗΜΟΣ ΕΓΝΑΤΙΑΣ
2143	ΔΗΜΟΣ ΑΡΕΘΟΥΣΑΣ

Να κατασκευαστεί γράφημα στο οποίο κάθε γραμμή να αντιπροσωπεύει την ύπαρξη κοινού συνόρου ανάμεσα στους αντίστοιχους Ο.Τ.Α. Να βρείτε το κέντρο του γραφήματος και την ακτίνα του. Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω Ο.Τ.Α. πρόκειται να αποτελέσουν μία διοικητική ενότητα, τι μπορείτε να πείτε για τη δομή της;

– Οδηγίες επίλυσης

Το γράφημα που προκύπτει από τον χάρτη που περιλαμβάνει ένα σύνολο από τους πρωτοβάθμιους Ο.Τ.Α. που βρίσκονται στο βόρειο, βορειοανατολικό τμήμα του Νομού Θεσσαλονίκης όταν κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει την ύπαρξη κοινού συνόρου ανάμεσα στους αντίστοιχους Ο.Τ.Α. είναι το παρακάτω:



Γράφημα 2: Πρωτοβάθμιοι Ο.Τ.Α.

Για να βρούμε το κέντρο του γραφήματος και την ακτίνα του θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων.

	A_1	$Λ_1$	B	$Λ_2$	E	Σ	A_2	M
ΜΥΓ	0	1	2	2	1	2	3	4
ΑΣΗ	1	0	1	1	1	2	2	3
ΛΑΧ	2	1	0	1	3	2	1	2
ΒΕΡ	2	1	1	0	2	1	1	2
ΛΑΓ	1	1	3	2	0	1	2	3
ΕΓΝ	2	2	2	1	1	0	1	2
ΣΟΧ	3	2	1	1	2	1	0	1
ΑΡΕ	4	3	2	2	3	2	1	0
ΜΥΓ	0	1	2	2	1	2	3	4

Πίνακας 1: Αποστάσεις σημείων

Ο Ο.Τ.Α. με την ελάχιστη εκκεντρικότητα είναι ο Δήμος Εγνατίας, άρα το σημείο του είναι το κέντρο του γραφήματος. Η ακτίνα του γραφήματος είναι ίση με 4.

Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω Ο.Τ.Α. πρόκειται να αποτελέσουν μία διοικητική ενότητα, σε γενικές γραμμές και λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη σχέση των συνόρων , θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρουσιάζει μία ικανοποιητική οργανωτική δομή. Μελανό σημείο μίας τέτοιας δομής θα μπορούσε να αποτελεί ο Δήμος Αρεθούσας του οποίου το σημείο έχει βαθμό ίσο με τη μονάδα και η αφαίρεσή του από το γράφημα θα μας έδινε μία πιο συγκροτημένη δομή με ακτίνα ίση με 3.

- Εκφώνηση άσκησης 5.3

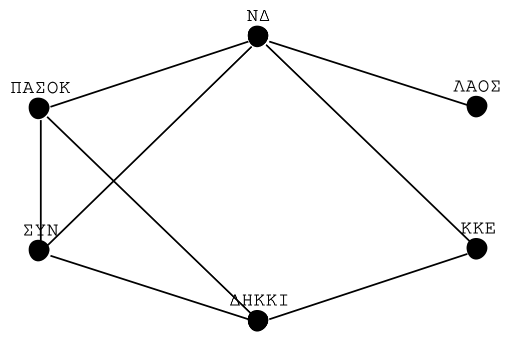
Αν υποθέσουμε ότι τα έξι μεγαλύτερα πολιτικά κόμματα της Ελλάδας έχουν κοινές θέσεις σε ποσοστό μεγαλύτερο από 10% όπως παρακάτω:

- Το ΠΑ.ΣΟ.Κ. με τη ΝΔ.
- Το ΠΑ.ΣΟ.Κ. με τον Συνασπισμό.
- Το ΠΑ.ΣΟ.Κ. με το ΔΗΚΚΙ.
- Η Ν.Δ. με το Κ.Κ.Ε.
- Η Ν.Δ. με το Συνασπισμό.
- Η Ν.Δ. με το ΛΑΟΣ.
- Το Κ.Κ.Ε. με το ΔΗΚΚΙ
- Ο Συνασπισμός με το ΔΗΚΚΙ

Να κατασκευάσετε ένα γράφημα στο οποίο η κάθε γραμμή ανάμεσα σε δύο κόμματα να συμβολίζει τη συμφωνία τους σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10%. Είναι το γράφημα συνεκτικό; Ποια είναι η ακτίνα του; Αν υποθέσουμε ότι για την μεταπήδηση ενός ψηφοφόρου από ένα πολιτικό κόμμα σε ένα άλλο, αρκεί η ταύτιση στο 10% των θέσεων, τι ερμηνεία δίνετε;

– Οδηγίες επίλυσης

Το γράφημα που προκύπτει στο οποίο η κάθε γραμμή ανάμεσα σε δύο κόμματα συμβολίζει τη συμφωνία τους σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10% για τα δεδομένα της άσκησης είναι το παρακάτω:



Γράφημα 3: Συμφωνία σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10%

Το γράφημα είναι συνεκτικό αφού για κάθε δύο σημεία του γραφήματος μπορεί να βρεθεί ένα μονοπάτι που τα συνδέει;

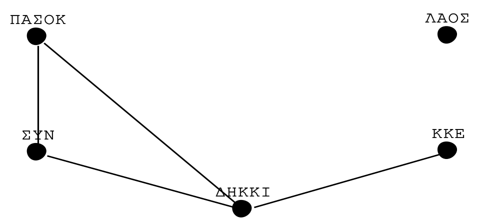
Αν δεχθούμε ότι για την μεταπήδηση ενός ψηφοφόρου από ένα πολιτικό κόμμα σε ένα άλλο, αρκεί η ταύτιση στο 10% των θέσεων, τότε μπορούμε να πούμε ότι ένας ψηφοφόρος μπορεί σταδιακά, και αφομοιώνοντας κάθε φορά το σύνολο των θέσεων του κόμματος στο οποίο ανήκει, να μετακινηθεί από οποιοδήποτε πολιτικό κόμμα σε οποιοδήποτε άλλο. Η ακτίνα του γραφήματος είναι ίση με 3 (η απόσταση από ΛΑΟΣ σε ΔΗΚΚΙ) και αυτό σημαίνει ότι ο οποιοσδήποτε ψηφοφόρος χρειάζεται το πολύ 3 βήματα για να μετακινηθεί από οποιοδήποτε πολιτικό κόμμα σε οποιοδήποτε άλλο.

- Εκφώνηση άσκησης 5.4

Να βρείτε το φέρον υπογράφημα του γραφήματος που ετοιμάσατε στην προηγούμενη άσκηση που περιέχει όλα τα κόμματα εκτός από τη Ν.Δ. Είναι το φέρον γράφημα συνεκτικό;

– Οδηγίες επίλυσης

Το φέρον υπογράφημα του γραφήματος της προηγούμενης άσκησης που περιέχει όλα τα κόμματα εκτός από τη Ν.Δ. είναι το παρακάτω:



Γράφημα 4: Συμφωνία σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10%

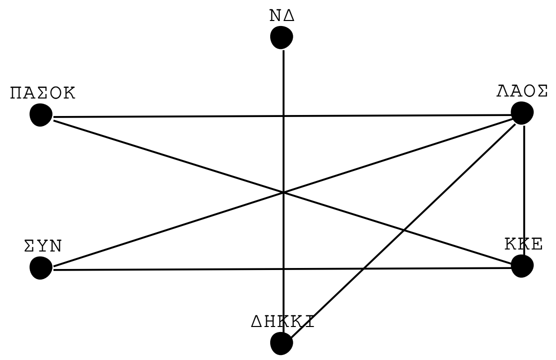
Το γράφημα αυτό δεν είναι συνεκτικό καθώς το ΛΑΟΣ αυτή τη φορά αποτελεί απομονωμένο σημείο. Συνεχίζοντας τον συλλογισμό της προηγούμενης άσκησης, οι μετακινήσεις από και προς το ΛΑΟΣ θα ήταν αδύνατες με βάση το παραπάνω γράφημα.

- Εκφώνηση άσκησης 5.5

Να κατασκευάσετε το συμπληρωματικό γράφημα του γραφήματος που ετοιμάσατε στην άσκηση 5.3. Ποια η ερμηνεία του;

– Οδηγίες επίλυσης

Το συμπληρωματικό του γραφήματος της άσκησης 5.3 είναι το παρακάτω:

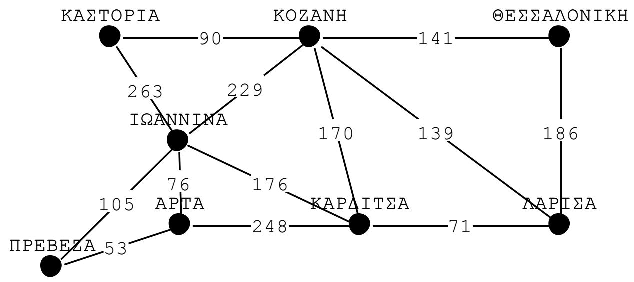


Γράφημα 5: Συμφωνία σε ποσοστό μεγαλύτερο του 10%

Σε αυτό το γράφημα κάθε γραμμή αντιπροσωπεύει την έλλειψη κοινών θέσεων, ή την ύπαρξή τους σε ποσοστό μικρότερο του 10%.

- Εκφώνηση άσκησης 5.6

Να βρείτε την διαδρομή με την ελάχιστη απόσταση από τη Θεσσαλονίκη στη Πρέβεζα χρησιμοποιώντας το παρακάτω γράφημα:



Γράφημα 6.1: Θεσσαλονίκη- Πρέβεζα

– Οδηγίες επίλυσης

4.1 Για να βρούμε τη διαδρομή με την ελάχιστη απόσταση από τη Θεσσαλονίκη στη Πρέβεζα θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Dijkstra:

1η επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη}, T={Κοζάνη, Λάρισα, Καστοριά, Καρδίτσα, Ιωάννινα, Άρτα, Πρέβεζα}

l(Κοζάνη)=w(Θεσσαλονίκη, Κοζάνη)=$\boxed{141}$

l(Λάρισα)=w(Θεσσαλονίκη, Λάρισα)=186

l(Καστοριά)=w(Θεσσαλονίκη, Καστοριά)= ∞

l(Καρδίτσα)=w(Θεσσαλονίκη, Καρδίτσα)= ∞

l(Ιωάννινα)=w(Θεσσαλονίκη, Ιωάννινα)= ∞

l(Άρτα)=w(Θεσσαλονίκη, Άρτα)= ∞

l(Πρέβεζα)=w(Θεσσαλονίκη, Πρέβεζα)= ∞

Το σημείο Κοζάνη είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο T στο σύνολο P.

2η επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη}, T={Λάρισα, Καστοριά, Καρδίτσα, Ιωάννινα, Άρτα, Πρέβεζα}

l(Λάρισα)= min[l(Λάρισα), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Λάρισα)] = min[186, 141+139] =$\boxed{186}$

l(Καστοριά)= min[l(Καστοριά), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Καστοριά)] = min[∞, 141+90]=231

l(Καρδίτσα)= min[l(Καρδίτσα), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Καρδίτσα)] = min[∞, 141+170]=311

l(Ιωάννινα)= min[l(Ιωάννινα), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Ιωάννινα)] = min[∞, 141+229]=370

l(Άρτα)= min[l(Άρτα), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Άρτα)] = min[∞, 141+∞]=∞

l(Πρέβεζα)= min[l(Πρέβεζα), l(Κοζάνη) + w(Κοζάνη, Πρέβεζα)]=min[∞, 141+∞]=∞

Το σημείο Λάρισα είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο T στο σύνολο P.

3η επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη, Λάρισα}, T={Καστοριά, Καρδίτσα, Ιωάννινα, Άρτα, Πρέβεζα}

l(Καστοριά)= min[l(Καστοριά), l(Λάρισα) + w(Λάρισα, Καστοριά)] = min[231, 186+∞]=$\boxed{231}$

l(Καρδίτσα)= min[l(Καρδίτσα), l(Λάρισα) + w(Λάρισα, Καρδίτσα)] = min[311, 186+71]=257

l(Ιωάννινα)= min[l(Ιωάννινα), l(Λάρισα) + w(Λάρισα, Ιωάννινα)] = min[370, 186+∞]=370

l(Άρτα)= min[l(Άρτα), l(Λάρισα) + w(Λάρισα, Άρτα)] = min[∞, 186+∞]=∞

l(Πρέβεζα)= min[l(Πρέβεζα), l(Λάρισα) + w(Λάρισα, Πρέβεζα)]=min[∞,186+∞]=∞

Το σημείο Καστοριά είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο T στο σύνολο P.

4η επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη, Λάρισα, Καστοριά}, T={Καρδίτσα, Ιωάννινα, Άρτα, Πρέβεζα}

l(Καρδίτσα)= min[l(Καρδίτσα), l(Καστοριά) + w(Καστοριά, Καρδίτσα)] = min[257, 231+71]=$\boxed{257}$

l(Ιωάννινα)= min[l(Ιωάννινα), l(Καστοριά) + w(Καστοριά, Ιωάννινα)] = min[370, 231+263] = 370

l(Άρτα)= min[l(Άρτα), l(Καστοριά) + w(Καστοριά, Άρτα)] = min[∞, 231+∞]=∞

l(Πρέβεζα)= min[l(Πρέβεζα), l(Καστοριά) + w(Καστοριά, Πρέβεζα)]=min[∞,231+∞]=∞

Το σημείο Καρδίτσα είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο T στο σύνολο P.

5^{η} επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη, Λάρισα, Καστοριά, Καρδίτσα}, *T*={Ιωάννινα, Άρτα, Πρέβεζα}

l(Ιωάννινα)= min[*l*(Ιωάννινα), *l*(Καρδίτσα) + *w*(Καρδίτσα, Ιωάννινα)] = min[370, 257+176] = $\boxed{370}$

l(Άρτα)= min[*l*(Άρτα), *l*(Καρδίτσα) + *w*(Καρδίτσα, Άρτα)] = min[∞, 257+248]=505

l(Πρέβεζα)= min[*l*(Πρέβεζα), *l*(Καρδίτσα) + *w*(Καρδίτσα, Πρέβεζα)]=min[∞,257+∞]=∞

Το σημείο Ιωάννινα είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο *T* στο σύνολο *P*.

6^{η} επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη, Λάρισα, Καστοριά, Καρδίτσα, Ιωάννινα}, *T*={Άρτα, Πρέβεζα}

l(Άρτα)= min[*l*(Άρτα), *l*(Ιωάννινα) + *w*(Ιωάννινα, Άρτα)] = min[505, 370+76]=$\boxed{446}$

l(Πρέβεζα)= min[*l*(Πρέβεζα), *l*(Ιωάννινα) + *w*(Ιωάννινα, Πρέβεζα)]=min[∞, 370+105]=475

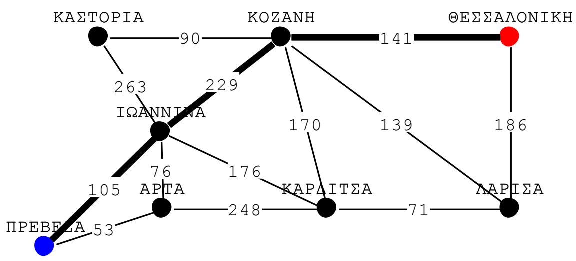
Το σημείο Άρτα είναι το σημείο με το μικρότερο δείκτη. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο θα μετακινήσουμε το σημείο αυτό από το σύνολο *T* στο σύνολο *P*.

7^{η} επανάληψη

P={Θεσσαλονίκη, Κοζάνη, Λάρισα, Καστοριά, Καρδίτσα, Ιωάννινα, Άρτα}, *T*={Πρέβεζα}

l(Πρέβεζα)= min[*l*(Πρέβεζα), *l*(Άρτα) + *w*(Άρτα, Πρέβεζα)]=min[475, 446+53]=$\boxed{475}$

Άρα το μονοπάτι με το ελάχιστο κόστος από τη Θεσσαλονίκη προς τη Πρέβεζα έχει βάρος 475. Την τιμή αυτή πήρε ο δείκτης της Πρέβεζας στην 6^{η} επανάληψη μέσω της πράξης *l*(Ιωάννινα) + *w*(Ιωάννινα, Πρέβεζα). Αντίστοιχα ο δείκτης των Ιωαννίνων πήρε την τιμή 370 στην 2^{η} επανάληψη μέσω της πράξης *l*(Κοζάνη) + *w*(Κοζάνη, Ιωάννινα). Ο δείκτης της Κοζάνης ορίστηκε στην 1^{η} επανάληψη ως το βάρος της γραμμής *w*(Θεσσαλονίκη, Κοζάνη). Με βάση τα παραπάνω το μονοπάτι με την ελάχιστη απόσταση από τη Θεσσαλονίκη προς τη Πρέβεζα είναι το Θεσσαλονίκη – Κοζάνη – Ιωάννινα – Πρέβεζα όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα.

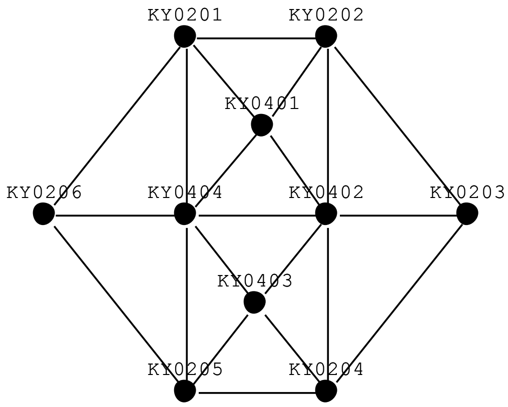


Γράφημα 6.2: Θεσσαλονίκη- Πρέβεζα

- Εκφώνηση άσκησης 5.7

Έστω ότι η Γραμματεία του Τμήματος Πολιτικών Επιστημών θέλει να διευκολύνει τους τελειόφοιτους του Τμήματος που χρωστούν μαθήματα από προηγούμενα εξάμηνα. Αποφάσισε λοιπόν ότι αν υπάρχουν δύο μαθήματα τα οποία χρωστούν ταυτόχρονα περισσότεροι από το 10% των τελειόφοιτων, τα μαθήματα αυτά δενθα πρέπει να εξεταστούν μέσα στην ίδια εβδομάδα της προσεχούς εξεταστικής περιόδου. Μάλιστα επειδή για την πρώτη εβδομάδα της εξεταστικής έχει προγραμματιστεί δύο μαθήματα του $8^{ου}$ εξαμήνου, είναι επιθυμητό τα χρωστούμενα μαθήματα να τακτοποιηθούν τις υπόλοιπες τρεις εβδομάδες.

Προκειμένου να διευκολυνθεί στο έργο της, η Γραμματεία ετοίμασε το παρακάτω γράφημα στο οποίο κάθε γραμμή που ενώνει δύο μαθήματα συμβολίζει ότι αυτά τα δύο μαθήματα τα χρωστάνε ταυτόχρονα περισσότεροι από το 10% των τελειοφοίτων του Τμήματος.



Γράφημα 7.1: δύο μαθήματα τα χρωστάνε ταυτόχρονα περισσότεροι από το 10% των τελειοφοίτων του Τμήματος.

Μπορείτε να δώσετε μία λύση στο πρόβλημα της Γραμματείας

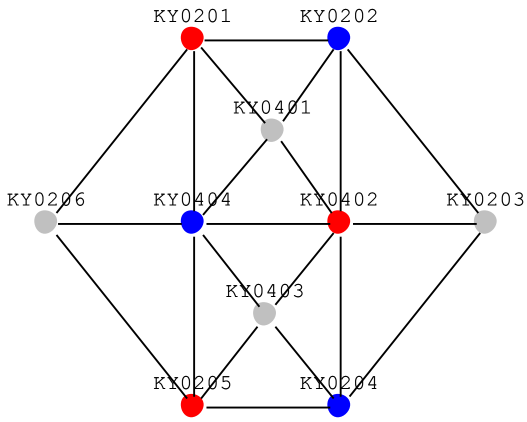
- Οδηγίες επίλυσης
- Το πρόβλημα της Γραμματείας του Τμήματος Πολιτικών Επιστημών αποτελεί ένα πρόβλημα ενός 3-χρωματισμού του γραφήματος. Πραγματικά αφού στο γράφημα κάθε γραμμή που ενώνει δύο μαθήματα συμβολίζει ότι αυτά τα δύο μαθήματα τα χρωστάνε ταυτόχρονα περισσότεροι από το 10% των τελειοφοίτων του Τμήματος και αφού θέλουμε να τακτοποιήσουμε όλα τα μαθήματα σε τρεις εβδομάδες, το πρόβλημα θα λυθεί αν χωρίσουμε όλα τα σημεία του γραφήματος σε τρεις το πολύ χρωματικές κλάσεις.

Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των ανεξαρτήτων συνόλων θα βρούμε τα παρακάτω ανεξάρτητα σύνολα:

{KY0201, KY0203, KY0205}, {KY0201, KY0203, KY0403}, {KY0201, KY0204}, {KY0201, KY0205, KY0402}, {KY0202, KY0204, KY0206}, {KY0202, KY0204, KY0404}, {KY0202, KY0205}, {KY0202, KY0206, KY0403}, {KY0203, KY0205, KY0401}, {KY0203, KY0206, KY0401, KY0403}, {KY0203, KY0404}, {KY0204, KY0206, KY0401}, {KY0206, KY0402}

Η ένωση του μικρότερου πλήθους ανεξαρτήτων συνόλων που ισούται με το σύνολο των κορυφών είναι η {KY0201, KY0205, KY0402}$\cup${KY0202, KY0204, KY0404}$\cup${KY0203, KY0206, KY0401, KY0403}

Έτσι μπορούμε να τακτοποιήσουμε την εξεταστική με έναν τρόπο που θα διευκολύνει τους τελειόφοιτους φοιτητές του τμήματος σύμφωνα με το παρακάτω γράφημα, όπου τα χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα σημεία, αντιστοιχούν σε μαθήματα που μπορούν να εξεταστούν την ίδια εβδομάδα:



Γράφημα 7.2: δύο μαθήματα τα χρωστάνε ταυτόχρονα περισσότεροι από το 10% των τελειοφοίτων του Τμήματος.